MEDIDA E INTEGRAÇÃO - MAT 5798 - IME 2016
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

LISTA 7 DE EXERCÍCIOS

SEÇÃO 3.1, p. 88

2. (a) Seja ν é uma medida com sinal. Então, E é ν-nulo se e só se $|\nu|(E) = 0$.
   (b) Se μ e ν são medidas com sinal, tem-se:

$$\nu \perp \mu \text{ se e somente se } \nu^{\pm} \perp \mu \text{ se e somente se } |\nu| \perp \mu.$$

3. Seja ν uma medida com sinal sobre $(X, \mathcal{M})$ e $E \in \mathcal{M}$.
   (a) $\L^1(\nu) = \L^1(|\nu|)$.
   (b) Se $f \in \L^1(\nu)$, então $|\int f d\nu| \leq \int |f| d|\nu|$.
   (c) Se $|\nu|$ for semi-finita então

$$|\nu|(E) = \sup\left\{\left|\int_E f d\nu\right| : f \in \L^1(\nu) \text{ e } |f| \leq 1\right\}.$$

4. Se $\nu = \lambda - \mu$ é uma medida com sinal, com λ e μ medidas positivas, então

$$\lambda \geq \nu^+ \text{ e } \mu \geq \nu^-.$$

5. Sejam ν_1 e ν_2 medidas com sinal. Suponha que ambas omitam o valor $+\infty$ ou ambas omitam o valor $-\infty$. Então

$$|\nu_1 + \nu_2| \leq |\nu_1| + |\nu_2|.$$

6. Seja $\nu(E) = \int_E f d\mu$, onde μ é uma medida positiva e f é μ-quase integrável (i.e., μ-integrável no sentido estendido). Dê as decomposições de Hahn de ν e as variações positiva, negativa e total de ν em termos de f e μ.

VIDE VERSO

SEÇÃO 3.2, pp. 92-93

8. $\nu \ll \mu$ se e somente se $|\nu| \ll \mu$ se e somente se $\nu^+ \ll \mu$ e $\nu^- \ll \mu$.

9. Seja $(\nu_j)_j$ uma sequência de medidas positivas.

   (a) Se $\nu_j \perp \mu$, para todo j, então $\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j \perp \mu$.

   (b) Se $\nu_j \ll \mu$, para todo j, então $\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j \ll \mu$.

E1. Sejam ν, ν_1 e ν_2 medidas com sinal, com a soma $\nu_1+\nu_2$ bem definida quando mencionada, e μ uma medida positiva sobre $(X, \mathcal{M})$.

   (a) ν é concentrada em A se e somente se ν^+, ν^- e $|\nu|$ também.

   (b) Se $\nu_1 \perp \nu_2$ então $|\nu_1| \perp |\nu_2|$.

   (c) Se $\nu_1 \perp \mu$ e $\nu_2 \perp \mu$ então $\nu_1 + \nu_2 \perp \mu$.

   (d) Se $\nu_1 \ll \mu$ e $\nu_2 \ll \mu$, então $\nu_1 + \nu_2 \ll \mu$.

   (e) Se $\nu \ll \mu$ então $|\nu| \ll \mu$.

   (f) Se $\nu_1 \ll \mu$ e $\nu_2 \perp \mu$ então $\nu_1 \perp \nu_2$.

   (g) Se $\nu \ll \mu$ e $\nu \perp \mu$ então $\nu = 0$.

   (h) Se $\nu_1 \perp \nu_2$ então
   $$|\nu_1 + \nu_2| = |\nu_1| + |\nu_2|.$$

   (i) Se $\nu_1 \perp \nu_2$ então $\nu_1^+, \nu_1^-, \nu_2^+$ e ν_2^- são duas a duas mutuamente singulares.

   (j) Se $\nu = f d\mu$, com f μ-integrável estendida então
   $$\nu^+ = f^+ d\mu \quad \text{e} \quad \nu^- f^- d\mu.$$

12. Para $j = 1, 2$, sejam ν_j, μ_j medidas positivas σ-finitas sobre $(X_j, \mathcal{M}_j)$ tais que $\nu_j \ll \mu_j$. Então $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$ e
$$\frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}(x_1, x_2) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x_1)\frac{d\nu_2}{d\mu_2}(x_2).$$

13. Sejam $X = [0,1]$, a σ-álgebra $\mathcal{M} = \mathcal{B}_{[0,1]}$, a medida de Lebesgue m e a medida de contagem μ definida em $\mathcal{M}$.

   (a) $m \ll \mu$, mas não existe f μ-quase integrável (isto é, uma função μ-integrável no sentido estendido) tal que $dm = f d\mu$.

   (b) μ não admite decomposição de Lebesgue com respeito a m.

14. Sejam ν uma medida com sinal arbitrária (não necessariamente σ-finita) e μ uma medida positiva σ-finita em $(X, \mathcal{M})$ tais que $\nu \ll \mu$. Então existe $f : X \to [-\infty, \infty]$ que é μ-quase integrável e tal que $d\nu = f d\mu$. Como sugestão, use o seguinte roteiro:

   (a) É suficiente demonstrar o caso em que μ é finita e ν é positiva.

   (b) Com tais hipóteses, existe um conjunto E σ-finito segundo ν tal que $\mu(E) \geq \mu(F)$ para todo F que é σ-finito segundo ν.

   (c) O teorema de Radon-Nikodym se aplica em E. Se F é mensurável e $F \cap E = \varnothing$, temos $\nu(F) = \mu(F) = 0$ ou então $\mu(F) = 0$ e $|\nu(F)| = \infty$.

16. Sejam μ, ν e λ medidas σ-finitas em $(X, \mathcal{M})$ tais que

$$\nu \ll \mu, \ \ \lambda = \mu + \nu \ \ \text{e} \ \ f = \frac{d\nu}{d\lambda}.$$

Então,

$$0 \leq f < 1 \ \ \mu\text{-q.s. e} \ \ \frac{d\nu}{d\mu} = \frac{f}{1-f}.$$