

MEDIDA E INTEGRAÇÃO - MAT 5798 - IME 2016

Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

LISTA 6 DE EXERCÍCIOS

SEÇÃO 2.7, pp. 80-81

E1. Enuncie o Teorema do Valor Médio para funções em uma variável real. Lembra de como prová-lo?

E2. (**Desigualdade do Valor Médio**). Seja  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função derivável (i.e., uma curva derivável em  $\mathbb{R}^2$ ) tal que  $M = \sup\{|F'(t)| : t \in \mathbb{R}\} < \infty$ . Mostre que quaisquer que sejam  $a$  e  $b$  em  $\mathbb{R}$ , temos

$$|F(b) - F(a)| \leq M|b - a|.$$

62. A medida  $\sigma$  em  $S^{n-1}$  é invariante por rotações.

64. Determine os valores reais  $a$  e  $b$  tais que a função

$$f(x) = |x|^a \left| \log |x| \right|^b$$

é integrável sobre os conjuntos abaixo.

(A)  $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \frac{1}{2}\}$ .

(B)  $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 2\}$ .

VIDE VERSO

65. Defina  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  por  $G(r, \phi_1, \dots, \phi_{n-2}, \theta) = (x_1, \dots, x_n)$  onde

$$x_1 = r \cos \phi_1, \quad x_2 = r \sin \phi_1 \cos \phi_2, \quad x_3 = r \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cos \phi_3, \dots$$

$$x_{n-1} = r \sin \phi_1 \cdots \sin \phi_{n-2} \cos \theta, \quad x_n = r \sin \phi_1 \cdots \sin \phi_{n-2} \sin \theta.$$

(a)  $G$  aplica  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^n$  sobrejetivamente e  $|G(r, \phi_1, \dots, \phi_{n-2}, \theta)| = |r|$ .

(b)  $\det JG(r, \phi_1, \dots, \phi_{n-2}, \theta) = r^{n-1} \sin^{n-2} \phi_1 \sin^{n-3} \phi_2 \cdots \sin \phi_{n-2}$ .

(c) Seja  $\Omega = (0, \infty) \times (0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi)$ . Então, a restrição

$$G|_{\Omega} : \Omega \rightarrow G(\Omega)$$

é um difeomorfismo e  $m[\mathbb{R}^n \setminus G(\Omega)] = 0$ .

(d) Seja  $F(\phi_1, \dots, \phi_{n-2}, \theta) = G(1, \phi_1, \dots, \phi_{n-2}, \theta)$  e  $\Omega' = (0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi)$ . Então a função

$$(F|_{\Omega'})^{-1}$$

define um sistema de coordenadas sobre  $S^{n-1}$  exceto em um conjunto  $\sigma$ -nulo e a medida de  $\sigma$  é expressa neste sistema de coordenadas por

$$d\sigma(\phi_1, \dots, \phi_{n-2}, \theta) = \sin^{n-2} \phi_1 \sin^{n-3} \phi_2 \cdots \sin \phi_{n-2} d\phi_1 \cdots d\phi_{n-2} d\theta.$$