

MEDIDA E INTEGRAÇÃO - MAT 5798 - IME 2013

Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Lista 3 de Exercícios - Seções 2.1, 2.2 e 2.3

E1. (**Lema de Borel-Cantelli**). Seja $(E_n)_{\mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos Lebesgue-mensuráveis em \mathbb{R} tal que

$$\sum m(E_n) < \infty.$$

Então, quase todo $x \in \mathbb{R}$ está em no máximo uma quantidade finita de $E_{n's}$.

SEÇÃO 2.1, pp. 48-49

1. Seja $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $Y = f^{-1}(\mathbb{R})$. Então, f é mensurável se e somente se

$$f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{M}, \quad f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathcal{M} \quad \text{e} \quad f \text{ é mensurável sobre } Y.$$

2. Sejam $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis.

(a) fg é mensurável (onde $0 \cdot (\pm\infty) = 0$).

(b) Fixe $a \in \overline{\mathbb{R}}$ e defina $h(x) = a$ se $f(x) = -g(x) = \pm\infty$ e $h(x) = f(x) + g(x)$ caso contrário. Então h é mensurável.

3. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis em X . Verifique que o conjunto $\{x \in X : \text{existe } \lim f_n(x)\}$ é mensurável.

4. Seja $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Se $f^{-1}((r, \infty]) \in \mathcal{M}$, para todo $r \in \mathbb{Q}$, então f é mensurável.

8. Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona, então f é Borel-mensurável.

9. Sejam $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ a **função de Cantor-Lebesgue** e $g(x) = f(x) + x$.

(a) g é uma bijeção de $[0, 1]$ em $[0, 2]$ e $h = g^{-1}$ é contínua.

(b) Se C é o **conjunto de Cantor** então $m(g(C)) = 1$.

(c) Pelo Exercício 29, capítulo 1, $g(C)$ contém um conjunto A que não é Lebesgue mensurável. Seja $B = g^{-1}(A)$. Então, B é Lebesgue mensurável mas não é um boreliano.

(d) Existem uma função Lebesgue mensurável F e uma função contínua G sobre \mathbb{R} tais que $F \circ G$ não é Lebesgue mensurável

11. Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, \cdot)$ é Borel-mensurável para cada x e $f(\cdot, y)$ é contínua para cada y . Definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, as funções $f_n : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ como segue. Para cada $i \in \mathbb{Z}$, consideremos $a_i = i/n$ e, para $a_i \leq x \leq a_{i+1}$:

$$f_n(x, y) = \frac{f(a_i, y) \cdot (x - a_i) + f(a_{i+1}, y) \cdot (a_{i+1} - x)}{a_{i+1} - a_i}$$

Então, para cada n , a função f_n é Borel-mensurável em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ e $f_n \rightarrow f$ pontualmente. Portanto, f é Borel-mensurável. Conclua, por indução em n , que toda função $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ separadamente contínua em cada variável é uma função Borel-mensurável.

- E2. Sejam $(X, \mathcal{M} = 2^X, \mu)$, onde μ é a medida de contagem, e $f : X \rightarrow [0, \infty]$. Então $f \in L^+$ e

$$\int f d\mu = \sum_X f.$$

Portanto, f é integrável com respeito à medida de contagem se e somente se f é somável (no sentido da lista 0).

SEÇÃO 2.2, p. 52.

13. Seja $(f_n) \subset L^+$ satisfazendo $f_n \xrightarrow{s} f$ e $\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu < \infty$. Então, temos $\lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$, para todo $E \in \mathcal{M}$. Verifique que isto não é verdadeiro, em geral, sob a hipótese $\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu = \infty$.
14. Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $f \in L^+$. Definamos

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu, \text{ para todo } E \in \mathcal{M}.$$

Então λ é uma medida em \mathcal{M} e, para toda $g \in L^+$ temos

$$\int g d\lambda = \int gf d\mu.$$

Sugestão. Suponha, inicialmente, g simples.

15. Seja $(f_n) \subset L^+$ tal que $f_n \searrow f$ pontualmente e $\int f_1 d\mu < \infty$. Então,

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

16. Seja $f \in L^+$ tal que $\int f d\mu < \infty$. Então, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existe um conjunto μ -mensurável E satisfazendo

$$\mu(E) < \infty \text{ e } \int_E f d\mu > \left(\int f d\mu \right) - \epsilon.$$

17. Assuma o Lema de Fatou e deduza o Teorema da Convergência Monótona.

E3. Se E_1, E_2 e E_3 são subconjuntos de \mathbb{R} , dizemos que $E = E_1 \times E_2 \times E_3$ é um **retângulo** em \mathbb{R}^3 e cada E_j é um **lado** ou **aresta** de E . Se os lados de E são intervalos, E é um **paralelepípedo** em \mathbb{R}^3 (com lados paralelos aos hiperplanos coordenados). Um **cubo** em \mathbb{R}^3 é um paralelepípedo fechado cujos lados tem igual comprimento.

Dado $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, seja \mathcal{C}_k a coleção dos cubos cujos lados tem comprimento $1/2^k$ e cujos vértices pertencem à grade $(\mathbb{Z}/2^k)^3 = \mathbb{Z}/2^k \times \mathbb{Z}/2^k \times \mathbb{Z}/2^k$. Isto é, $C = \prod_{j=1}^3 [a_j, b_j] \in \mathcal{C}_k$ se e só se $2^k a_j$ e $2^k b_j$ são inteiros e $b_j - a_j = 1/2^k$.

Verifique as afirmações abaixo.

- (1) O \mathbb{R}^3 é a reunião dos cubos na coleção \mathcal{C}_k e tais cubos tem interiores disjuntos. Os cubos em \mathcal{C}_{k+1} , são subcubos dos cubos em \mathcal{C}_k e são obtidos bisectando os lados dos cubos em \mathcal{C}_k .
- (2) A **coleção dos cubos diádicos** é $\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}_k$. Dados dois cubos diádicos, ou um deles está contido no outro ou seus interiores são disjuntos.
- (3) Todo aberto é união contável de cubos diádicos.
- (4) Podemos supor que os cubos em (3) tem interiores disjuntos.