MEDIDA E INTEGRAÇÃO - MAT 5798 - IME 2016

Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Lista 3 de Exercícios - Seções 2.1, 2.2 e 2.3

Resolva, no mínimo, os dez exercícios marcados com asterisco.

E1. **(Lema de Borel-Cantelli).** Seja $(E_n)_{\mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos Lebesgue-mensuráveis em $\mathbb{R}$ tal que

$$\sum m(E_n) < \infty.$$

Então, quase todo $x \in \mathbb{R}$ está em no máximo uma quantidade finita de $E_{n's}$.

SEÇÃO 2.1, pp. 48-49

1. Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ e $Y = f^{-1}(\mathbb{R})$. Então, f é mensurável se e somente se

$$f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{M}, \quad f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathcal{M} \quad \text{e} \quad f \text{ é mensurável sobre } Y.$$

2* Sejam $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis.

(a) fg é mensurável (onde $0 \cdot (\pm\infty) = 0$).

(b) Fixe $a \in \overline{\mathbb{R}}$ e defina

$$h(x) = \begin{cases} a, & \text{se } f(x) = -g(x) = \pm\infty, \text{ e} \\ f(x) + g(x), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então h é mensurável.

3* Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis em X. Verifique que o conjunto $\{x \in X : \text{ existe } \lim f_n(x)\}$ é mensurável.

4. Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Se $f^{-1}\big((r, \infty]\big) \in \mathcal{M}$, para todo $r \in \mathbb{Q}$, então f é mensurável.

8* Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é monótona, então f é Borel-mensurável.

9* Sejam $f : [0,1] \to [0,1]$ a **função de Cantor-Lebesgue** e $g(x) = f(x) + x$.

(a) g é uma bijeção de $[0,1]$ em $[0,2]$ e $h = g^{-1}$ é contínua.

(b) Se C é o **conjunto de Cantor** então $m(g(C)) = 1$.

(c) Pelo Exercício 29, capítulo 1, $g(C)$ contém um conjunto A que não é Lebesgue mensurável. Seja $B = g^{-1}(A)$. Então, B é Lebesgue mensurável mas não é um boreliano.

(d) Existem uma função Lebesgue mensurável F e uma função contínua G sobre $\mathbb{R}$ tais que $F \circ G$ não é Lebesgue mensurável

11* Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, \cdot)$ é Borel-mensurável para cada x e $f(\cdot, y)$ é contínua para cada y. Definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, as funções $f_n : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ como segue. Para cada $i \in \mathbb{Z}$, consideremos $a_i = i/n$ e, para $a_i \leq x \leq a_{i+1}$:

$$f_n(x,y) = \frac{f(a_i, y)\cdot(x - a_i) + f(a_{i+1}, y)\cdot(a_{i+1} - x)}{a_{i+1} - a_i}$$

Então, para cada n, a função f_n é Borel-mensurável em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ e $f_n \to f$ pontualmente. Portanto, f é Borel-mensurável. Conclua, por indução em n, que toda função $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ separadamente contínua em cada variável é uma função Borel-mensurável.

E2* Sejam $(X, \mathcal{M} = 2^X, \mu)$, onde μ é a medida de contagem, e $f : X \to [0,\infty]$. Então $f \in Ł^+$ e

$$\int f\, d\mu = \sum_X f.$$

Portanto, f é integrável com respeito à medida de contagem se e somente f é somável (no sentido da lista 0; i.e., se a família $f : X \to [0,\infty]$ é somável).

SEÇÃO 2.2, p. 52.

13* Seja $(f_n) \subset Ł^+$ satisfazendo $f_n \xrightarrow{s} f$ e $\int f\, d\mu = \lim \int f_n\, d\mu < \infty$. Então, temos

$$\lim \int_E f_n\, d\mu = \int_E f\, d\mu, \text{ para todo } E \in \mathcal{M}.$$

Mostre que isto não é verdade, em geral, sob a hipótese

$$\int f\, d\mu = \lim \int f_n\, d\mu = \infty.$$

14* Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $f \in Ł^+$. Definamos

$$\lambda(E) = \int_E f\, d\mu, \text{ para todo } E \in \mathcal{M}.$$

Então λ é uma medida em $\mathcal{M}$ e, para toda $g \in Ł^+$ temos

$$\int g\, d\lambda = \int gf\, d\mu.$$

Sugestão. Suponha, inicialmente, g simples.

15. Seja $(f_n) \subset Ł^+$ tal que $f_n \searrow f$ pontualmente e $\int f_1\, d\mu < \infty$. Então,

$$\int f\, d\mu = \lim \int f_n\, d\mu.$$

16* Seja $f \in Ł^+$ tal que

$$\int f\, d\mu < \infty.$$

Então, dado $\epsilon > 0$ existe um conjunto μ-mensurável E satisfazendo

$$\mu(E) < \infty \quad \text{e} \quad \int_E f\, d\mu > \left(\int f\, d\mu \right) - \epsilon.$$

17. Assuma o Lema de Fatou e deduza o Teorema da Convergência Monótona.

E3* Se E_1, E_2 e E_3 são subconjuntos de $\mathbb{R}$, dizemos que

$$E = E_1 \times E_2 \times E_3$$

é um **retângulo** em $\mathbb{R}^3$ e cada E_j é um **lado** ou **aresta** de E. Se os lados de E são intervalos, então E é um **paralelepípedo** em $\mathbb{R}^3$ (com lados paralelos aos hiperplanos coordenados). Um **cubo** em $\mathbb{R}^3$ é um paralelepípedo fechado cujos lados tem igual comprimento.

Dado $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, seja $\mathcal{C}_k$ a coleção dos cubos de lados com comprimento $1/2^k$ e com vértices na grade $(\mathbb{Z}/2^k)^3 = \mathbb{Z}/2^k \times \mathbb{Z}/2^k \times \mathbb{Z}/2^k$. Isto é,

$$C = \prod_{j=1}^{3} [a_j, b_j] \in \mathcal{C}_k \text{ se e só se } 2^k a_j \text{ e } 2^k b_j \text{ são inteiros e } b_j - a_j = \frac{1}{2^k}.$$

Verifique as afirmações abaixo.

(1) O $\mathbb{R}^3$ é a reunião dos cubos na coleção $\mathcal{C}_k$ e tais cubos tem interiores disjuntos. Os cubos em $\mathcal{C}_{k+1}$, são subcubos dos cubos em $\mathcal{C}_k$ e são obtidos bisectando os lados dos cubos em $\mathcal{C}_k$.

(2) A **coleção dos cubos diádicos** é

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}_k.$$

Dados dois cubos diádicos, ou um deles está contido no outro ou seus interiores são disjuntos.

(3) Todo aberto é união contável de cubos diádicos.

(4) Podemos supor que os cubos em (3) tem interiores disjuntos.