MEDIDA E INTEGRAÇÃO - MAT 5798 - IME 2013
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

LISTA 13 DE EXERCÍCIOS

Uma função $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ é dita **estritamente convexa** se quaisquer que sejam $x, y \in (a,b)$, com $x \neq y$, e $\lambda \in (0,1)$, vale a desigualdade estrita

$$\varphi\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) < \lambda\varphi(x) + \varphi(y).$$

Dizemos que φ é **(estritamente) côncava** se $-\varphi$ é (estritamente) convexa.

E1. Seja $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$.

(i) Suponha $\varphi \in C^1$. Então, φ é convexa se e somente se, fixado qualquer $y \in (a,b)$, o gráfico de φ está acima da reta tangente em $(y, \varphi(y))$:

$$\varphi(x) \geq \varphi(y) + \varphi'(y)(x-y).$$

(ii) Seja φ convexa e derivável. Se $\varphi'(c) = 0$, então $\varphi(c)$ é mínimo global.

(iii) Se φ é convexa, então mínimos locais são mínimos globais.

(iv) Se φ é côncava, então máximos locais são máximos globais.

(v) Se φ é convexa, então φ admite derivadas laterais à direita e à esquerda, $D^+\varphi$ e $D^-\varphi$ as quais satisfazem $D^+\varphi(x) \leq D^-\varphi(x)$ em cada ponto x. Ainda, as funções $D^+\varphi$ e $D^-\varphi$ são monótonas crescentes. Ainda mais, a função φ é derivável exceto em um conjunto de medida nula.

(vi) Se φ é convexa e derivável, então $\varphi \in C^1$.

(vii) Se $\varphi \in C^2$ e $\varphi'' > 0$, então φ é estritamente convexa. Mostre uma $\varphi \in C^2$ estritamente convexa que não satisfaz $\varphi' > 0$ em todo ponto.

(viii) A função exponencial real é estritamente convexa.

(ix) A função logaritmo natural é estritamente côncava.

(x) Se φ é estritamente convexa [côncava] então φ tem no máximo um ponto de mínimo [máximo] global.

E2. Consideremos um par de conjugados $p, q \in (1, \infty)$.

(i) Utilizando que a função exponencial real é estritamente convexa, mostre a **Desigualdade de Young**: dados quaisquer $a, b \geq 0$ temos

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

ocorrendo a igualdade se e somente se $a^p = b^q$.

(ii) Utilizando (i), redemonstre a desigualdade de Hölder.

Seção 7.2, p. 220–221

7. Seja μ uma medida de Radon σ-finita num espaço Hausdorff localmente compacto X. Mostre que para todo boreliano $A \subset X$, a medida de Borel μ_A definida por

$$\mu_A(E) = \mu(E \cap A)$$

é uma medida de Radon.

8. Suponha que μ é uma medida de Radon sobre um espaço Hausdorff localmente compacto X. Seja $\phi \in L^1(\mu)$ tal que $\phi \geq 0$. Então, $\nu = \phi d\mu$ é uma medida de Radon.

11 Seja μ uma medida de Radon num espaço Hausdorff localmente compacto X tal que, para todo $x \in X$ temos $\mu(\{x\}) = 0$. Seja $A \subset X$ um boreliano arbitrário tal que $0 < \mu(A) < \infty$. Mostre que para todo $0 < \alpha < \mu(A)$ existe um boreliano $B \subset A$ tal que $\mu(B) = \alpha$.

E3. Suponha todos os $\lambda_{j's} > 0$, $x_{j's} > 0$, x, y, z, p, q, r números maiores que 0.

(a) Suponha $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Mostre que

$$\log(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 \log x_1 + \cdots + \lambda_n \log x_n,$$

ocorrendo a igualdade se e somente se $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

(b) Suponha

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1.$$

Utilizando a concavidade estrita da função $\log t$, mostre que temos

$$xyz \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} + \frac{z^r}{r},$$

ocorrendo a igualdade se e somente se $x^p = y^q = z^r$.

E4. Sejam $x, y, z \geq 0$ and let $p, q, r > 1$ tais que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1.$$

Usando duas vezes a desigualdade de Young (2 parâmetros) em E2., mostre

$$xyz \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} + \frac{z^r}{r},$$

ocorrendo a igualdade se e somente se $x^p = y^q = z^r$.

E5. Sejam $\mu, \nu \in M(\mathbb{R}^n)$. Defina $\mu \times \nu \in M(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ por

$$d(\mu \times \nu)(x, y) = \frac{d\mu}{d|\mu|}(x) \frac{d\nu}{d|\nu|}(y) d(|\mu| \times |\nu|)(x, y),$$

e $\mu * \nu \in M(\mathbb{R}^n)$ por: dado $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ pomos

$$(\mu * \nu)(E) = \mu \times \nu\big(\alpha^{-1}(E)\big),$$

onde $\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é a adição. Isto é, $\alpha(x, y) = x + y$.

A medida

$$\mu * \nu$$

chama-se **convolução** de μ e ν.

Verifique as afirmações abaixo

(a) para todo boreliano $E \subset \mathbb{R}^n$ temos

$$(\mu * \nu)(E) = \iint \chi_E(x+y)d\mu(x)d\nu(y).$$

(b) A convolução de medidas de Radon é comutativa e associativa.

(c) Para toda função boreliana limitada h temos

$$\int h\,d(\mu * \nu) = \iint h(x+y)d\mu(x)d\nu(y).$$

(d) $\|\mu * \nu\| \leq \|\mu\|\,\|\nu\|$.

(d) Seja m a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$. Consideremos $f, g \in Ł^1(m)$ e definamos $\mu = f dm$ e $\nu = g dm$. Então

$$d(\mu * \nu) = (f * g)dm.$$

Isto é, em $L^1(\mathbb{R}^n)$ a nova e a velha definição de convolução coincidem.

Seção 7.3 pp. 224–225

16. Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto. Consideremos um funcional $I \in C_0(X, \mathbb{R})^*$ e os funcionais positivos I^+ e I^- construídos na demonstração do Lema 5.1 nas notas de aula. Se μ é a medida de Radon com sinal induzida por I, então as variações positiva e negativa de μ são as medidas de Radon induzidas, respectivamente, por I^+ e I^-.

18. Sejam μ uma medida de Radon positiva e σ-finita sobre X e uma medida de Radon $\nu \in M(X)$. Escrevamos $\nu = \nu_1 + \nu_2$, com $\nu_1 \perp \mu$ e $\nu_2 \ll \mu$, a decomposição de Lebesgue de ν com respeito a μ. Mostre que ν_1 e ν_2 são medidas de Radon.

22 [Para os alunos familiares com Análise Funcional] Uma sequência $(f_n)_{\mathbb{N}}$ em $C_0(X)$ converge fracamente para $f \in C_0(X)$ se e somente se

$$\sup\{\|f_n\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty \text{ e } \ f_n \to f \text{ pontualmente.}$$