MEDIDA E INTEGRAÇÃO - MAT 5798 - IME 2013
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Lista 1 de Exercícios

E1. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Sejam

$$M(x) = \lim_{\delta\to 0}\Big(\sup_{0<|y-x|\leq\delta} f(y)\Big), \qquad m(x) = \lim_{\delta\to 0}\Big(\inf_{0<|y-x|\leq\delta} f(y)\Big).$$

(a) Se $\delta \searrow 0$ então $\sup\limits_{0<|y-x|\leq\delta} f(y)$ decresce enquanto $\inf\limits_{0<|y-x|\leq\delta} f(y)$ cresce.

(b) $\lim\limits_{y\to x} f(y) = L$ se e somente se $M(x) = m(x) = L$.

E2. Proposições 1.2 a 1.7, Folland pp. 22-23.

E3. Sejam X um conjunto, $f : X \to [0,\infty]$ e $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ dada por $\mu(E) = \sum_{x\in E} f(x)$. Verifique as afirmações abaixo.

(a) μ é uma medida em $\big(X, \mathcal{P}(X)\big)$.

(b) μ é semi-finita se e somente se temos $f(x) < \infty$, para todo $x \in X$.

(c) μ é σ-finita se e somente se μ é semi-finita e f se anula no complementar de um conjunto enumerável.

E4. Sejam $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ uma álgebra e $(A_n)_{\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{A}$.

(a) Existe $(B_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ tal que $\cup_{n=1}^{k} A_n = \cup_{n=1}^{k} B_n$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

(b) Existe $(B_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, crescente, tal que $\cup_{n=1}^{k} A_n = \cup_{n=1}^{k} B_n$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

E5. Propriedades das medidas. Consideremos $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Valem as seguintes propriedades.

(a) Monotonicidade: se $E, F \in \mathcal{M}$ e $E \subset F$, então $\mu(E) \leq \mu(F)$.

(b) Subaditividade enumerável: se $(E_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$, então $\mu(\cup E_n) \leq \sum \mu(E_n)$.

(c) Continuidade inferior: se $(E_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ é uma sequência crescente, então $\mu(E_n) \nearrow \mu(\cup E_n)$.

(d) Continuidade superior: se $(E_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ é uma sequência decrescente e $\mu(E_1) < \infty$, então $\mu(E_n) \searrow \mu(\cap E_n)$. Apresente um contra-exemplo, subtraindo a hipótese $\mu(E_1) < \infty$.

E6. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Diz-se que $N \in \mathcal{M}$ é **nulo** se $\mu(N) = 0$. Dizemos que μ é **completa** se todo subconjunto de um conjunto nulo for mensurável. Seja $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{M} : \mu(N) = 0\}$. Defina

$$\overline{\mathcal{M}} = \{E \cup F : E \in \mathcal{M} \text{ e } F \subset N, \text{ com } N \in \mathcal{N}\}.$$

Mostre que $\overline{\mathcal{M}}$ é uma σ-álgebra em X e que existe uma única extensão $\overline{\mu}$ de μ a uma medida completa em $\overline{\mathcal{M}}$.

E7. Mantenhamos as hipóteses e a notação em E7. Mostre que se $Y \in \overline{\mathcal{M}}$ é tal que $\overline{\mu}(Y) = 0$, então Y é subconjunto de um conjunto nulo $N \in \mathcal{N}$.

EXERCÍCIOS DO FOLLAND
SEÇÃO 1.2

1. Uma família $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ chama-se um **anel** se é fechada por uniões finitas e diferenças (i.e. se $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{R}$ então $\cup_1^n E_i \in \mathcal{R}$ e, ainda, se $E, F \in \mathcal{R}$ então $E \setminus F \in \mathcal{R}$). Um anel fechado por uniões enumeráveis é um **σ-anel**.
   (a) Anéis (σ-anéis) são fechados por intersecções finitas (enumeráveis).
   (b) Se $\mathcal{R}$ é um anel (σ-anel), então $\mathcal{R}$ é uma álgebra (σ-álgebra) se e somente se $X \in \mathcal{R}$.
   (c) Se $\mathcal{R}$ é um σ-anel, então $\{E \subset X : E \in \mathcal{R} \text{ ou } E^c \in \mathcal{R}\}$ é uma σ-álgebra.
   (d) Se $\mathcal{R}$ é um σ-anel, então $\{E \subset X : E \cap F \in \mathcal{R}, \forall F \in \mathcal{R}\}$ é uma σ-álgebra.

3. Seja $\mathcal{M}$ uma σ-álgebra infinita.
   (a) $\mathcal{M}$ contém uma sequência infinita de conjuntos disjuntos.
   (b) $\text{card}(\mathcal{M}) \geq c$, onde $c = \text{card}(\mathbb{R})$.

4. Uma álgebra $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra se e somente se for fechada por uniões enumeráveis crescentes. Isto é, se $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ é crescente, então $\cup_{\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{A}$.

5. Se $\mathcal{M}$ é a σ-álgebra gerada por $\mathcal{E}$, então $\mathcal{M}$ é a união das σ-álgebras $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ geradas pelos subconjuntos enumeráveis $\mathcal{F}$ da coleção $\mathcal{E}$.

SEÇÃO 1.3

7. Se $\mu_1, \ldots, \mu_n$ são medidas em $(X, \mathcal{M})$ e $a_1, \ldots, a_n \in [0, \infty)$, então $\sum_{i=1}^n a_i \mu_i$ é uma medida em $(X, \mathcal{M})$. Isto vale para famílias arbitrárias $(\mu_i)_{i \in I}$ de medidas e famílias arbitrárias $(a_i)_{i \in I} \subset [0, \infty)$? Isto é, a fórmula $\mu = \sum_{i \in I} a_i \mu_i$ define uma medida em $(X, \mathcal{M})$?

8. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $(E_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. Definamos
$$\liminf E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n \quad \text{e} \quad \limsup E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n.$$
Verifique:
   (a) $\liminf E_n = \{x : \ x \in E_n \text{ para todo } n \text{ exceto uma quantidade finita de } n's\}$.
   (b) $\limsup E_n = \{x : \ x \in E_n \text{ para uma quantidade infinita de } n's\}$.
   (c) $\mu(\liminf E_n) \leq \liminf \mu(E_n)$.
   (d) $\mu(\limsup E_n) \geq \limsup \mu(E_n)$, se $\mu(\cup_{\mathbb{N}} E_n) < \infty$.

9. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $E, F \in \mathcal{M}$. Então, vale a identidade $\mu(E \cup F) + \mu(E \cap F) = \mu(E) + \mu(F)$.

10. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $E \in \mathcal{M}$. Defina $\mu_E(A) = \mu(E \cap A)$, para todo $A \in \mathcal{M}$. Mostre que μ_E é uma medida.

11. Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{M}$ uma σ-álgebra sobre X. Seja μ uma **medida finitamente aditiva** em $(X, \mathcal{M})$ $\big[$isto é, $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ é tal que $\mu(\varnothing) = 0$ e, ainda, para toda sequência finita $(E_n)_{n=1}^{n=k} \subset \mathcal{M}$ de conjuntos disjuntos temos $\mu(\dot\bigcup_1^k E_n) = \sum_1^k \mu(E_n)\big]$. Verifique:
    (a) μ é uma medida se e somente se μ é contínua inferiormente.
    (b) Se $\mu(X) < \infty$ então, μ é uma medida se e só se μ é contínua superior/e.

12. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida finita. Sejam E e F em $\mathcal{M}$.
    (a) Se $\mu(E \Delta F) = 0$ então $\mu(E) = \mu(F)$.
    (b) Defina $E \sim F$ se $\mu(E \Delta F) = 0$. É "$\sim$" uma relação de equivalência?
    (c) Defina $\rho(E, F) = \mu(E \Delta F)$. Então $\rho(E, G) \leq \rho(E, F) + \rho(F, G)$. Mostre também que ρ define uma métrica no quociente $\mathcal{M}/\sim$.

13. Toda medida σ-finita é semi-finita.

14. Sejam μ uma medida semi-finita e E mensurável tal que $\mu(E) = \infty$. Então, para todo $C > 0$, existe $F \subset E$ mensurável tal que $C < \mu(F) < \infty$.

15. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Defina a função μ_0 sobre $\mathcal{M}$ por $\mu_0(E) = \sup\{\mu(F) : F \subset E \text{ mensurável e } \mu(F) < \infty\}$.

    (a) μ_0 é uma medida semi-finita, chamada **parte semi-finita** de μ.

    (b) Se μ é semi-finita, então $\mu = \mu_0$. Dica: exercício 14.

    (c) Existe uma medida ν em $\mathcal{M}$ (em geral, não é única) que assume apenas valores 0 e ∞ tal que $\mu = \mu_0 + \nu$.

16. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Um conjunto $E \subset X$ diz-se **localmente mensurável** se $E \cap A \in \mathcal{M}$ para todo $A \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(A) < \infty$. Seja $\mathcal{M}_{\text{loc}}$ o coleção de todos os subconjuntos localmente mensuráveis de X. Então, $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_{\text{loc}}$. Se ocorre $\mathcal{M}_{\text{loc}} = \mathcal{M}$, dizemos que μ é **saturada**.

    (a) Se μ for σ-finita, então μ é saturada.

    (b) $\mathcal{M}_{\text{loc}}$ é uma σ-álgebra.

    (c) Defina

    $$\nu(E) = \mu(E), \text{ se } E \in \mathcal{M}, \text{ e } \nu(E) = \infty \text{ se } E \in \mathcal{M}_{\text{loc}} \setminus \mathcal{M}.$$

    Então ν é uma medida saturada sobre $\mathcal{M}_{\text{loc}}$, dita **saturação** de μ.

    (d) Se μ for completa, ν também o é.

    (e) Suponha que μ seja semi-finita. Dado $E \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$, defina

    $$\nu_0(E) = \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{M} \text{ e } A \subset E\}.$$

    Então, ν_0 é uma medida saturada em $\mathcal{M}_{\text{loc}}$ que estende μ.

    (f) Sejam X_1, X_2 conjuntos disjuntos não enumeráveis e $X = X_1 \cup X_2$. Sejam $\mathcal{M}$ a σ-álgebra dos subconjuntos enumeráveis ou co-enumeráveis de X e μ_0 a medida de contagem sobre $\mathcal{P}(X_1)$. Defina μ sobre $\mathcal{M}$ por

    $$\mu(E) = \mu_0(E \cap X_1).$$

    Então, μ é uma medida sobre $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}_{\text{loc}} = \mathcal{P}(X)$. Ainda mais, com a notação dos itens anteriores temos $\nu \neq \nu_0$.