MEDIDA E INTEGRAÇÃO - MAT 5798 - IME 2016
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Lista 1 de Exercícios

Resolva, no mínimo, os oito (8) exercícios com asterisco.

E1* Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. Sejam

$$M(x) = \lim_{\delta\to 0}\left(\sup_{0<|y-x|\le\delta} f(y)\right), \qquad m(x) = \lim_{\delta\to 0}\left(\inf_{0<|y-x|\le\delta} f(y)\right).$$

(a) Se $\delta \searrow 0$ então $\sup\limits_{0<|y-x|\le\delta} f(y)$ decresce enquanto $\inf\limits_{0<|y-x|\le\delta} f(y)$ cresce.

(b) $\lim\limits_{y\to x} f(y) = L$ se e somente se $M(x) = m(x) = L$.

EXERCÍCIOS DO FOLLAND
SEÇÃO 1.2

1* Uma família $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ chama-se um **anel** se é fechada por uniões finitas e diferenças (i.e. se $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{R}$ então $\cup_1^n E_i \in \mathcal{R}$ e, ainda, se $E, F \in \mathcal{R}$ então $E \setminus F \in \mathcal{R}$). Um anel fechado por uniões enumeráveis é um **σ-anel**.

(a) Anéis (σ-anéis) são fechados por intersecções finitas (enumeráveis).

(b) Se $\mathcal{R}$ é um anel (σ-anel), então $\mathcal{R}$ é uma álgebra (σ-álgebra) se e somente se $X \in \mathcal{R}$.

(c) Se $\mathcal{R}$ é um σ-anel, então $\{E \subset X : E \in \mathcal{R} \text{ ou } E^c \in \mathcal{R}\}$ é uma σ-álgebra.

(d) Se $\mathcal{R}$ é um σ-anel, então $\{E \subset X : E \cap F \in \mathcal{R}, \forall F \in \mathcal{R}\}$ é uma σ-álgebra.

3. Seja $\mathcal{M}$ uma σ-álgebra infinita.

(a) $\mathcal{M}$ contém uma sequência infinita de conjuntos disjuntos.

(b) $\text{card}(\mathcal{M}) \ge c$, onde $c = \text{card}(\mathbb{R})$.

4. Uma álgebra $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra se e somente se for fechada por uniões enumeráveis crescentes. Isto é, se $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ é crescente, então $\cup_{\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{A}$.

5. Se $\mathcal{M}$ é a σ-álgebra gerada por $\mathcal{E}$, então $\mathcal{M}$ é a união das σ-álgebras $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ geradas pelos subconjuntos enumeráveis $\mathcal{F}$ da coleção $\mathcal{E}$.

SEÇÃO 1.3

7. Se $\mu_1, \ldots, \mu_n$ são medidas em $(X, \mathcal{M})$ e $a_1, \ldots, a_n \in [0, \infty)$, então

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i$$

é uma medida em $(X, \mathcal{M})$. Isto vale para famílias arbitrárias $(\mu_i)_{i \in I}$ de medidas e famílias arbitrárias $(a_i)_{i \in I} \subset [0, \infty)$? Isto é, a fórmula

$$\mu = \sum_{i \in I} a_i \mu_i$$

define uma medida em $(X, \mathcal{M})$?

8* Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $(E_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. Definamos

$$\liminf E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n \quad \text{e} \quad \limsup E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n.$$

Verifique:

(a) $\liminf E_n = \{x : \ x \in E_n$ para todo n exceto uma quantidade finita de $n's\}$.

(b) $\limsup E_n = \{x : \ x \in E_n$ para uma quantidade infinita de $n's\}$.

(c) $\mu(\liminf E_n) \leq \liminf \mu(E_n)$.

(d) $\mu(\limsup E_n) \geq \limsup \mu(E_n)$, se $\mu(\cup_{\mathbb{N}} E_n) < \infty$.

9* Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $E, F \in \mathcal{M}$. Então, vale a identidade

$$\mu(E \cup F) + \mu(E \cap F) = \mu(E) + \mu(F).$$

10* Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $E \in \mathcal{M}$. Defina

$$\mu_E(A) = \mu(E \cap A), \ \text{para todo } A \in \mathcal{M}.$$

Mostre que μ_E é uma medida.

11. Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{M}$ uma σ-álgebra sobre X. Seja μ uma **medida finitamente aditiva** em $(X, \mathcal{M})$ $\big[$isto é, $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ é tal que $\mu(\varnothing) = 0$ e, ainda, para toda sequência finita $(E_n)_{n=1}^{n=k} \subset \mathcal{M}$ de conjuntos disjuntos temos $\mu(\bigcup_1^k E_n) = \sum_1^k \mu(E_n)\big]$. Verifique:

   (a) μ é uma medida se e somente se μ é contínua inferiormente.

   (b) Se $\mu(X) < \infty$ então, μ é uma medida se e só se μ é contínua superior/e.

12* Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida finita. Sejam E e F em $\mathcal{M}$.

   (a) Se $\mu(E \Delta F) = 0$ então $\mu(E) = \mu(F)$.

   (b) Defina $E \sim F$ se $\mu(E \Delta F) = 0$. É "$\sim$" uma relação de equivalência?

   (c) Defina $\rho(E, F) = \mu(E \Delta F)$. Então

   $$\rho(E, G) \leq \rho(E, F) + \rho(F, G).$$

   Mostre também que ρ define uma métrica no quociente $\mathcal{M}/\sim$.

13. Toda medida σ-finita é semi-finita.

14. Sejam μ uma medida semi-finita e E mensurável tal que $\mu(E) = \infty$. Então, para todo $C > 0$, existe $F \subset E$ mensurável tal que

   $$C < \mu(F) < \infty.$$

15* Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Defina a função μ_0 sobre $\mathcal{M}$ por

   $$\mu_0(E) = \sup\{\mu(F) : F \subset E \ \text{ mensurável e } \mu(F) < \infty\}.$$

   (a) μ_0 é uma medida semi-finita, chamada **parte semi-finita** de μ.

   (b) Se μ é semi-finita, então

   $$\mu = \mu_0.$$

   Dica: exercício 14.

   (c) Existe uma medida ν em $\mathcal{M}$ (em geral, não é única) que assume apenas valores 0 e ∞ satisfazendo

   $$\mu = \mu_0 + \nu.$$

16* Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Um conjunto $E \subset X$ diz-se **localmente mensurável** se $E \cap A \in \mathcal{M}$ para todo $A \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(A) < \infty$. Seja $\mathcal{M}_{\text{loc}}$ o coleção de todos os subconjuntos localmente mensuráveis de X. Então, $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_{\text{loc}}$. Se ocorre $\mathcal{M}_{\text{loc}} = \mathcal{M}$, dizemos que μ é **saturada**.

(a) Se μ for σ-finita, então μ é saturada.

(b) $\mathcal{M}_{\text{loc}}$ é uma σ-álgebra.

(c) Defina

$$\nu(E) = \mu(E), \text{ se } E \in \mathcal{M}, \text{ e } \nu(E) = \infty \text{ se } E \in \mathcal{M}_{\text{loc}} \setminus \mathcal{M}.$$

Então ν é uma medida saturada sobre $\mathcal{M}_{\text{loc}}$, dita **saturação** de μ.

(d) Se μ for completa, ν também o é.

(e) Suponha que μ seja semi-finita. Dado $E \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$, defina

$$\nu_0(E) = \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{M} \text{ e } A \subset E\}.$$

Então, ν_0 é uma medida saturada em $\mathcal{M}_{\text{loc}}$ que estende μ.

(f) Sejam X_1, X_2 conjuntos disjuntos não enumeráveis e $X = X_1 \cup X_2$. Sejam $\mathcal{M}$ a σ-álgebra dos subconjuntos enumeráveis ou co-enumeráveis de X e μ_0 a medida de contagem sobre $\mathcal{P}(X_1)$. Defina μ sobre $\mathcal{M}$ por

$$\mu(E) = \mu_0(E \cap X_1).$$

Então, μ é uma medida sobre $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}_{\text{loc}} = \mathcal{P}(X)$. Ainda mais, com a notação dos itens anteriores temos $\nu \neq \nu_0$.