MEDIDA E INTEGRAÇÃO - MAT5798 - IME-USP 2016

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Lista zero de Exercícios

1. Sejam X e Y dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, não vazios. Verifique o que segue.

   (a) $\sup X + \sup Y = \sup(X+Y)$, com a convenção $\sup X = +\infty$ se X é ilimitado superiormente [analogamente para $\sup Y$].

   (b) Admita $x \leq y$, para todos $x \in X$ e $y \in Y$. Prove $\sup X \leq \inf Y$. Supondo X e Y limitados, mostre que temos $\sup X = \inf Y$ se e somente se para todo $\epsilon > 0$ existem $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $y - x < \epsilon$.

   (c) Suponha X e Y limitados e contidos em $(0, +\infty)$. Defina o "produto" $X \cdot Y := \{xy \mid x \in X \quad \text{e} \quad y \in Y\}$. Mostre que $X \cdot Y$ é limitado e que $\sup(X \cdot Y) = (\sup X)(\sup Y)$ e também que $\inf(X \cdot Y) = (\inf X)(\inf Y)$.

   (d) $\inf(-X) = -\sup X$ e $\sup(-X) = -\inf X$.

2. Toda sequência em $\mathbb{R}$ contém uma subsequência monótona.

3. Seja (x_n) uma sequência real. Verifique as afirmações abaixo.

   (a) $\liminf(-x_n) = -\limsup x_n$ e $\limsup(-x_n) = -\liminf x_n$.

   (b) Suponha (x_n) limitada. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ para o qual temos $\liminf x_n - \epsilon \leq x_n \leq \limsup x_n + \epsilon$, para todo $n \geq N$.

   (c) $\limsup x_n$ é valor de aderência de (x_n) , e é o maior valor de aderência.

   (d) $\lim x_n = L \in [-\infty, +\infty]$ se e somente se $\liminf x_n = \limsup x_n = L$.

   Dicas. Para (b): prove uma das desigualdades e use (a). Em (c) e (d), use (b).

4. Sejam (x_n) e (y_n) sequências limitadas em $\mathbb{R}$. Mostre que

   $$\liminf x_n + \liminf y_n \leq \liminf(x_n+y_n) \text{ e } \limsup(x_n+y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n.$$

   Ainda mais, se $x_n \geq 0$ e $y_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, mostre que

   $$(\liminf x_n)(\liminf y_n) \leq \liminf(x_n y_n) \text{ e } \limsup(x_n y_n) \leq (\limsup x_n)(\limsup y_n).$$

   Verifique que as desigualdades acima podem ser estritas. Dê exemplos.

5. Sejam (x_n) e (y_n) sequências em $\mathbb{R}$, com $\lim x_n = x \in \mathbb{R}$. Então, valem as identidades $\limsup(x_n + y_n) = x + \limsup y_n$ e $\liminf(x_n + y_n) = x + \liminf y_n$.

6. Seja (x_n) uma sequência real e limitada. Verifique as afirmações abaixo.

   (a) $\inf\limits_{n \geq i} x_n \leq \inf\limits_{n \geq i+1} x_n \leq x_{i+j+1} \leq \sup\limits_{n \geq j+1} x_n \leq \sup\limits_{n \geq j} x_n$, para todos $i \in \mathbb{N}$ e $j \in \mathbb{N}$.

   (b) $-\infty < \lim\limits_{i \to +\infty} \inf\limits_{n \geq i} x_n \leq \lim\limits_{j \to +\infty} \sup\limits_{n \geq j} x_n < +\infty$.

   (c) Defina $m = \lim\limits_{i \to +\infty} \inf\limits_{n \geq i} x_n$ e $M = \lim\limits_{j \to +\infty} \sup\limits_{n \geq j} x_n$. Seja L um valor de aderência da sequência (x_n). Então, é válida a desigualdade $m \leq L \leq M$.

   Sugestão: considere uma subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergindo a L.

   (d) Os números m e M são valores de aderência de (x_n). Sugestão: a sequência $m_i = \inf\limits_{n \geq i} x_n$, onde $i \in \mathbb{N}$, é crescente e convergente a m e, ainda, $m = \sup\{m_i : i \in \mathbb{N}\}$.

   (e) Conclua que $\lim\limits_{i \to +\infty} \inf\limits_{n \geq i} x_n = \underline{\lim}\, x_n$ e $\lim\limits_{j \to +\infty} \sup\limits_{n \geq j} x_n = \overline{\lim}\, x_n$.

7. Seja $(x_n)_{\mathbb{N}}$ real e ilimitada. Mostre: $\sup\limits_{i \in \mathbb{N}} \inf\limits_{n \geq i} x_n = \underline{\lim}\, x_n$ e $\inf\limits_{j \in \mathbb{N}} \sup\limits_{n \geq j} x_n = \overline{\lim}\, x_n$.

8. Seja (X, d) um espaço métrico, (x_n) uma sequência em X e $x \in X$.

   (a) Se (x_n) é de Cauchy e tem subsequência convergente a x, então $x_n \to x$.

   (b) (x_n) tem uma subsequência convergente a x se e somente se para quaisquer $\epsilon > 0$ e N em $\mathbb{N}$, existe algum $n > N$ tal que $d(x_n, x) < \epsilon$.

   (c) (x_n) converge a x se e somente se toda subsequência $(x_{n_j}) = (y_j)$ admite uma subsequência (y_{j_k}) convergente a x.

   (e) Dizemos que (X, d) é **completo** se todas as suas sequências de Cauchy são convergentes em X. Mostre que $\mathbb{R}$ é completo.

9. Sejam (X, d_1) e (Y, d_2) espaços métricos. Mostre que a função

$$d[(x_1, y_1); (x_2, y_2)] = d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2),$$

onde (x_1, y_1) e (x_2, y_2) pertencem a $X \times Y$, define uma métrica sobre $X \times Y$.

10. Seja K um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Mostre que são equivalentes:

    (a) Toda cobertura de K por conjuntos abertos tem subcobertura finita.

    (b) K é fechado e limitado.

    (c) Todo subconjunto infinito de K tem ponto de acumulação em K.

    (d) Toda sequência em K admite subsequência convergente em K.

11. Dada uma sequência de conjuntos $(E_n)_{\mathbb{N}}$, definimos

$$\limsup E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \quad \text{e} \quad \liminf E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n.$$

    Mostre que $\limsup E_n = \{x : x \in E_n$ para uma quantidade infinita de n's em $\mathbb{N}\}$. Ainda mais, $\liminf E_n = \{x : x \in E_n$ exceto para uma quantidade finita de n's em $\mathbb{N}\}$.

12. **(Weierstrass)** Seja K um conjunto compacto em $\mathbb{R}^n$ e $f : K \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que f assume máximo e mínimo em K.

13. (a) Defina, topologicamente, conexidade.

    (b) Seja $X \subset \mathbb{R}$. Mostre que X é conexo se e somente se X é um intervalo.

14. Todo conjunto aberto em $\mathbb{R}$ é união contável disjunta de intervalos abertos.

15. **("Baby" Tietze)** Seja F fechado em $\mathbb{R}$ e $f : F \to \mathbb{R}$ contínua.

    (a) Mostre que f tem uma extensão contínua $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dica: use (14).

    (b) Podemos escolher F satisfazendo $\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |F(\xi)| \leq \sup_{x \in F} |f(x)|$.

16. **Expansão na base 2.** Para $x \in (0, 1]$ temos as propriedades abaixo:

    (a) Existe uma única sequência (a_n) binária, $a_n = 0$ ou $a_n = 1$, não eventualmente nula [isto é, para todo p existe $n > p$ tal que $a_n = 1$] satisfazendo $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}$. Assim, x admite uma única expansão binária infinita.

    (b) Se $x \in J = \left\{ \frac{p}{2^n} ;\ \text{com } p \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \text{ e } p < 2^n \right\}$, então x tem uma só expansão finita [i.e., para algum $N \in \mathbb{N}$ temos $a_n = 0$ para todo $n \geq N$] e uma única expansão infinita, com (a_n) eventualmente igual a 1 [i.e., para algum $N \in \mathbb{N}$ temos $a_n = 1$ para todo $n \geq N$].

(c) Se x admite uma expansão binária finita ou a sequência (a_n) é eventualmente 1, mas $(a_n)_{\mathbb{N}}$ não é a sequência constante $(1)_{\mathbb{N}}$, então $x \in J$.

(d) A expansão finita é única.
Sugestão: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$.

17. **Expansão na base 3 (dita ternária ou triádica).** Para $x \in [0,1]$ temos

(a) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, onde temos $a_n = 0$ ou $a_n = 1$ ou $a_n = 2$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Tal expansão é única, a menos que $x \in J = \{\frac{p}{3^m},\ \text{com } p, m \in \mathbb{N} \text{ e } p < 3^m\}$.

(c) Se $x = \frac{p}{3^m} \in J$, com $p \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}$, então há duas expansões: uma **finita** (ou **eventualmente nula**) com $a_j = 0$ para todo $j > m$ e uma **infinita** com $a_j = 2$ para todo $j > m$. Se $\mathrm{mdc}(p,3) = 1$, uma das expansões é tal que $a_m = 1$ e a outra é tal que $a_m = 0$ ou $a_m = 2$. Esta segunda é dita **normalizada**.

(d) Determine as expansões normalizadas para 1/3, 2/3, 1/9, 2/9, 5/9, 7/9.

(e) Utilizando a expansão normalizada em (c), temos

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{3^n} < y = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{3^n}$$

se e somente se existe n tal que $a_n < b_n$ e $a_j = b_j$ para $j < n$.

(f) O **conjunto de Cantor** é o conjunto dos x em $[0,1]$ que tem uma expansão ternária $x = \sum_{j=0}^{\infty} a_j 3^{-j}$ tal que $a_j \neq 1$ (logo, $a_j = 0$ ou $a_j = 2$), para todo j. Considerando tal expansão para $x \in C$, seja $\Phi : C \to [0,1]$, definida por

$$\Phi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j/2}{2^j}.$$

Mostre que Φ é uma bijeção (logo, C é não enumerável).

18. Seja K um conjunto perfeito em $\mathbb{R}^n$. Mostre que K é não enumerável.

19. Seja $p : J \times \mathcal{K} \to [0, +\infty]$, com $p(j,k) = p_{j,k}$, uma família. Mostre que

$$\sum_{J \times \mathcal{K}} p_{j,k} = \sum_{J} \sum_{\mathcal{K}} p_{j,k} = \sum_{\mathcal{K}} \sum_{J} p_{j,k}.$$

20. Sejam $(z_j)_J$ e $(w_j)_J$ famílias complexas e somáveis e $\lambda \in \mathbb{C}$.

    (A) As famílias $(z_j + w_j)_J$, $(\lambda z_j)_J$ e $(\overline{z_j})_J$ são somáveis.

    (B) $\sum(z_j + w_j) = \sum z_j + \sum w_j$.

    (C) $\sum \lambda z_j = \lambda \sum z_j$.

    (D) $\overline{\sum z_j} = \sum \overline{z_j}$.

    Dica. Mostre, primeiro, o caso $z_j = p_j$ e $w_j = q_j$ positivos. Segundo, o caso $z_j = p_j - q_j$ e $w_j = P_j - Q_j$ reais, com p_j e q_j as partes positiva e negativa de z_j, e P_j e Q_j as partes positiva e negativa de w_j. Por fim, o caso z_j e w_j complexos, com a notação $z_j = a_i + ib_j$ e $w = c_j + id_j$, com a_j, b_j, c_j e d_j reais.

21. Sejam $(z_j)_J$ e $(w_k)_{\mathcal{K}}$ famílias complexas e somáveis. Mostre

$$(A) \quad \left(\sum_J z_j\right)\left(\sum_{\mathcal{K}} w_k\right) = \sum_{J\times\mathcal{K}} z_j w_k. \qquad\qquad (B) \quad \left|\sum z_j\right| \le \sum |z_j|.$$

22. Mostre que a série complexa $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ converge absolutamente se e só se (z_n) é família somável. Ocorrendo um ou outro, temos $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum\limits_{\mathbb{N}} z_n$.

23. Suponha $|z| < 1$, com $z \in \mathbb{C}$. Utilizando somas não ordenadas, compute a série $1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots$.

24. Complete a prova da *Lei Associativa para somas não ordenadas em* $\mathbb{C}$.

25. Verifique as afirmações abaixo, relativas à série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(z + \frac{1}{2}\right)^n.$$

    (A) A série converge se $|z + \frac{1}{2}| < 1$.

    (B) Se todas as potências de $(z + \frac{1}{2})$ são expandidas e o resultado é então rearranjado como uma série em potências de z, esta nova série não converge em $z = -1$. Explique a "contradição" com a Lei Associativa.

26. (A) Seja (z_j) uma família somável. Mostre que $\{j \in J : z_j \neq 0\}$ é enumerável.

    (B) Seja $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ crescente. Mostre que o conjunto dos pontos de descontinuidade de F é enumerável. Sugestão: utilize (A).

27. (A) **Teste da Raíz**. Toda série complexa $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ converge absolutamente se $\limsup \sqrt[n]{|z_n|} < 1$. Por outro lado, $\lim |z_n| = +\infty$ se $\limsup \sqrt[n]{|z_n|} > 1$.

Fórmula de Hadamard. Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ uma série de potências complexa e $\rho = 1/\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, +\infty]$.

(B) Se $|z| < \rho$ então $\sum |a_n z^n| < \infty$. (C) Se $|z| > \rho$ então $\sum |a_n z^n| = +\infty$.

(D) Se $|z| = \rho$ então nada podemos afirmar sobre a convergência de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

28. Verifique as afirmações abaixo.

(a) A série $\exp(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$.

(b) $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$, quaisquer que sejam $z \in \mathbb{C}$ e $w \in \mathbb{C}$. Dica: efetue o produto das somas não ordenadas $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ e $\sum_{m\geq 0} \frac{z^m}{m!}$.

(c) $\exp(z)\exp(-z) = 1$, para todo $z \in \mathbb{C}$, $\exp(0) = 1$ e $\exp(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(d) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h} = 1$. Conclua que $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ é complexa-derivável em todo $z \in \mathbb{C}$, com $\exp'(z) = \exp(z)$. Conclua que exp é contínua.

(e) $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Leia sobre $\exp(z)$, a relação de Euler e o número π em "baby" Rudin.

29. Seja $g_1 \leq g_2 \leq \cdots \leq \Phi \leq \cdots \leq f_2 \leq f_1$, com $g_{j's}$ e $f_{k's}$ funções contínuas à direita. Seja $x \in \mathbb{R}$ tal $g_j(x) \nearrow \Phi(x)$ e $f_k(x) \searrow \Phi(x)$. Mostre que Φ é contínua à direita no ponto x. Prove resultado análogo para continuidade à esquerda.

30. Seja (X, d) um espaço métrico, A, B subconjuntos de X e $x \in X$. Definimos $d(x; A) = \inf\{d(x; a) : a \in A\}$ e $d(A; B) = \inf\{d(a; b) : a \in A, b \in B\}$. Verifique

(a) $|d(x; A) - d(y; A)| \leq d(x; y)$, quaisquer que sejam $x, y \in X$.

(b) A função $f(x) = d(x; A)$, para $x \in X$, é uniformemente contínua.

(c) Dado $r > 0$, o conjunto $\{x : d(x; A) < \epsilon\}$ é aberto.

(d) Dado $r > 0$, temos $\overline{\{x : d(x; A) < r\}} \subset \{d(x; A) \leq r\}$.

(e) $d(x; A) = 0$ se e somente se $x \in \overline{A}$.

(f) Em $\mathbb{R}^n$, a distância entre dois compactos disjuntos é maior que zero.

(g) Dê exemplo, em $\mathbb{R}^2$, de dois fechados disjuntos que distam zero.