2ª PROVA DE FUNÇÕES ANALÍTICAS- IMEUSP - MAT 5714

31 de outubro, 2014

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Nome : ____

NºUSP : ______________________

Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Justifique todas as passagens, com uma redação clara e não carregada em simbologia.
BOA SORTE!

1. Defina famílias equicontínuas, localmente limitadas e normais (relativamente compactas). Enuncie o Teorema de Montel.

   Seja $\mathcal{F}$ uma família em $\mathcal{A}(\Omega)$ e localmente limitada. Prove, usando o Lema de Schwarz, que $\mathcal{F}$ é equicontínua sobre cada compacto K contido em Ω.
   Sugestões. Mostre as afirmações abaixo.

   (a) Existe $r > 0$ tal que $K(r) = \{z : d(z;K) \leq r\} \subset \Omega$. Ainda, $K(r)$ é compacto.

   (b) Existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$, para toda $f \in \mathcal{F}$ e para todo z em $K(r)$.

   (c) Dados quaisquer $a \in K$ e $f \in \mathcal{F}$, a função

   $$\widetilde{f}(z) = \frac{f(a + rz) - f(a)}{2M}$$

   aplica o disco $D(0;1)$ em $D(0;1)$ e satisfaz $\widetilde{f}(0) = 0$.

2. Consideremos o quadrado Q centrado na origem e de vértices

   $$z_0 = z_4 = 1 + i, \quad z_1 = -1 + i, \quad z_2 = -(1+i), \quad \text{e} \quad z_3 = 1 - i.$$

   Consideremos as curvas (esboce os segmentos lineares)

   $$\gamma_k(t) = z_k + (t-k)(z_{k+1} - z_k), \text{ onde } t \in [k, k+1], \text{ para } k = 0,1,2,3.$$

   Seja $\gamma : [0,4] \to \mathbb{C}$ dada pela justaposição $\gamma = \gamma_0 \vee \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3$. Isto é, temos $\gamma(t) = \gamma_k(t)$ se $t \in [k, k+1]$ e γ é a fronteira do quadrado Q. Mostre que

   $$\mathrm{Ind}(\gamma;0) = \mathrm{Ind}(\gamma_0;0) + \mathrm{Ind}(\gamma_1;0) + \mathrm{Ind}(\gamma_2;0) + \mathrm{Ind}(\gamma_3;0).$$

   Mostre que $\mathrm{Ind}(\gamma_k;0) = \frac{1}{4}$ para $k = 0,1,2,3$. Mostre então que $\mathrm{Ind}(\gamma;0) = 1$.

3. Sejam um raio $R > 1$ e γ a semi-circunferência orientada no sentido anti-horário (esboce) dada por

$$\gamma(t) = \begin{cases} Re^{it}, & \text{se } 0 \leq t \leq \pi \\ t - (\pi + R), & \text{se } \pi \leq t \leq \pi + 2R. \end{cases}$$

Mostre que $\mathrm{Ind}(\gamma; i) = 1$.

4. (a) Verifique que $p(z) = z^5 + 13z^2 + 15$ tem

dois zeros na coroa $\{z : 1 < |z| < 2\}$ e três zeros na coroa $\left\{z : 2 < |z| < \dfrac{5}{2}\right\}$.

(b) Seja $a \in \mathbb{C}$, com $|a| > e$ (onde e é o número de Euler). Verifique que a equação

$$e^z - az^n = 0$$

tem exatamente n soluções em $B(0; 1)$.

5. Suponha que Ω é um aberto conexo e não vazio de $\mathbb{C}$. Seja f_n, para $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de funções holomorfas em Ω e $u_n = \mathrm{Re}(f_n)$.

Prove que se (u_n) converge compactamente em Ω e se existe $\alpha \in \Omega$ tal que $(f_n(\alpha))$ converge em $\mathbb{C}$, então (f_n) converge compactamente em Ω.

6. Considere circunferências orientadas γ_1, γ_2 e γ_3 tais que γ_1 é positivamente orientada e γ_2 e γ_3 são negativamente orientadas e contidas no interior de γ_1, além de que γ_2 e γ_3 são disjuntas e seus interiores também.

Sejam $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ e o conjunto $V = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 1\}$. Suponha $0 \in V$.

(a) Se Ω é um aberto conexo contendo $\overline{V}$ e $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, determine $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ sabendo que

$$f(z) = \int_\Gamma \frac{g(\xi)(1 - \cos \xi)}{\xi^2(\xi - z)}\, d\xi, \text{ para todo } z \in V.$$

(b) Seja $a \in V$ tal que $a \neq 0$ e $g(a)(1 - \cos a) \neq 0$. Calcule

$$\lambda = \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - a)^2} dz.$$

Sugestão. Teorema de Cauchy homológico.

7. Sejam Ω um aberto não vazio de $\mathbb{C}$ e $[a,b]$ um intervalo compacto de $\mathbb{R}$. Consideremos duas funções Riemann-integráveis $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ e $\psi : [a,b] \to \mathbb{C}$. Suponhamos que $\varphi(t) \notin \Omega$ para todo $t \in [a,b]$.

   Prove que a função $F : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por
$$F(z) = \int_a^b \frac{\psi(t)}{\varphi(t) - z} dt$$
   é analítica.
   Dica. Considere um ponto $\zeta \in \Omega$ e desenvolva $F(z)$ em uma série de potências em um disco $D(\zeta; r)$ com um raio r conveniente.

   Determine então o maior aberto conexo de $\mathbb{C}$ no qual é analítica a função
$$G(z) = \int_0^1 \frac{\sin t}{t^2 - e^z} dt.$$

8. Compute as integrais

$$(a) \qquad \int\limits_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{1}{z^2 - 3z + 2} dz.$$

$$(b) \qquad \int\limits_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{3z^2 - 6z + 2}{z^3 - 3z^2 + 2z} dz.$$

   Sugestão. Desenvolva os integrandos pelo método de frações parciais.

9. Seja Ω um aberto não vazio e arbitrário em $\mathbb{C}$. Seja (f_n) uma sequência de funções analíticas em Ω que converge compactamente a uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Mostre que:

   (a) f é analítica em Ω.

   (b) a sequência $(f_n^{(k)})$ converge compactamente a $f^{(k)}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

10. (a) Seja $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Consideremos a transformação de Möbius
$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$
   Mostre que temos $\varphi(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$ se e só se podemos escolher a, b, c e d em $\mathbb{R}$.

   (b) Seja Γ uma circunferência (generalizada) por z_2, z_3 e z_4 em $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Dois pontos z e z^*, ambos em $\mathbb{C}_\infty$, são ditos simétricos com relação a Γ se
$$[z^*, z_2, z_3, z_4] = \overline{[z, z_2, z_3, z_4]}.$$
   Mostre que a definição de simetria independe dos pontos escolhidos em Γ. [Isto é, se w_2, w_3, w_4 são outros três pontos em Γ, então a equação destacada acima é satisfeita se e somente se $[z^*, w_2, w_3, w_4] = \overline{[z, w_2, w_3, w_4]}$.]

   Conclua que, dada uma aplicação de Möbius φ e duas circunferências (generalizadas) Γ_1 e Γ_2 onde $\varphi(\Gamma_1) = \Gamma_2$, então a aplicação φ mapeia um par de pontos (α, β) simétrico em relação a Γ_1 no par $(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$ simétrico em relaçao a Γ_2.

11. Defina produto cruzado. Sejam z_1, z_2, z_3 e z_4 números distintos em $\mathbb{C}$.

    (a) Prove a fórmula para o produto cruzado

    $$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$$

    e prove que z_1, z_2, z_3 e z_4 pertencem a uma mesma circunferência ou a uma mesma reta se e somente se seu produto cruzado é um número real.

    (b) Suponha que z_1, z_2, z_3 e z_4 pertencem a uma mesma circunferência, e nesta ordem (suponha ou o sentido anti-horário ou o horário). Mostre que

    $$|z_1 - z_3||z_2 - z_4| \;=\; |z_1 - z_2||z_3 - z_4| \;+\; |z_2 - z_3||z_4 - z_1|.$$

12. Prove o teorema fundamental da álgebra como um corolário do teorema de Rouché.

13. Sejam f e f_n, para $n = 1, 2, \ldots$, analíticas e não constantes em um aberto e conexo Ω. Suponhamos que

    $$f_n \;\text{ converge compactamente a }\; f.$$

    Seja $\alpha \in \Omega$ e $r > 0$, com $D(\alpha; r) \subset \Omega$. Seja $\gamma(t) = \alpha + re^{i\theta}$, onde $\theta \in [0, 2\pi]$. Suponhamos que f não se anula na imagem de γ. Então, para todo n grande o suficiente, f_n e f tem o mesmo número de zeros no *interior* de γ.

14. (a) Seja $p(z)$ um polinômio com coeficientes reais não negativos e, ainda,

    $$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \text{ onde } 0 \leq a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n.$$

    Mostre que todos os zeros de $p(z)$ estão dentro do disco unitário $D(0; 1)$. **Sugestão.** Aplique o teorema de Rouché à função $(1 - z)p(z)$.

    (b) Prove que, para todo $0 < \rho < 1$, o polinômio

    $$P_n(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + (n + 1)z^n$$

    não tem zeros na bola $B(0; \rho)$, se n é grande o suficiente.

15. Sejam Ω um aberto no plano complexo e $[a,b]$ um intervalo compacto na reta. Seja $f : \Omega \times [a,b] \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Suponha f holomorfa na primeira variável, para cada t fixado em $[a,b]$. Considere a função

$$F(z) = \int_a^b f(z,t)dt, \text{ onde } z \in \Omega.$$

Mostre que

(a) F é contínua.

(b) F é holomorfa.

(c) Vale a fórmula,

$$F'(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt, \text{ para todo } z \in \Omega.$$

16. Seja $f : \mathbb{C} \times [0,+\infty) \to \mathbb{C}$ contínua. Suponha que para cada z_0 em $\mathbb{C}$, existem um disco $D(z_0;r)$ não degenerado e uma função $M : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ satisfazendo

$$|f(z,t)| \leq M(t), \text{ para todos } z \in D(z_0;r) \text{ e } t \in [0,+\infty), \text{ e } \int_0^\infty M(t)dt < \infty.$$

Verifique as afirmações abaixo.

(a) Está bem definida a função $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\varphi(z) = \int_0^\infty f(z,t)dt.$$

(b) A função φ é contínua.

(c) Suponha que $\frac{\partial f}{\partial z}(z,t)$ existe e é contínua em $\mathbb{C} \times [0,+\infty)$. Suponha também que para cada ponto z_0 no plano existem uma vizinhança compacta K do ponto z_0 e uma função $N : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ satisfazendo

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\right| \leq N(t), \text{ para todos } z \in K \text{ e } t \in [0,+\infty), \text{ e } \int_0^\infty N(t)dt < \infty.$$

Então, φ é holomorfa e

$$\varphi'(z) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt.$$

17. Seja Ω um aberto conexo tal que $0 \notin \Omega$. Seja Ω^* o simétrico de Ω em relação à circunferência S^1. Isto é,

$$\Omega^* = \{z^* : z \in \Omega\}, \text{ com } z^* \text{ o simétrico de } z \text{ em relação a } S^1.$$

(a) Mostre que
$$\Omega^* = \left\{ \frac{1}{\overline{z}} : z \in \Omega \right\}.$$

(b) Se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, defina $f^* : \Omega^* \to \mathbb{C}$ por
$$f^*(z) = \overline{f\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}.$$

Mostre que f^* é holomorfa.

(c) Suponha que Ω é simétrico em relação a S^1. Isto é, $\Omega^* = \Omega$. Suponha que f é holomorfa em Ω e que $f(z) \in \mathbb{R}$, para todo $z \in \Omega \cap S^1$. Mostre que
$$f^* = f.$$

(d) Enuncie e prove uma versão do Princípio da Reflexão de Schwarz (visto na aula) em que a reta real é substituída por S^1.

18. (a) Existe ou não uma sequência de polinômios que converge uniformemente em $D(0;1)$ para $g(z) = \overline{z}$? Justifique a sua resposta.

(b) Seja $f : D(0;1) \to \mathbb{C}$ contínua, com f holomorfa na bola $B(0;1)$. Mostre que existe uma sequência de polinômios que converge uniformemente no disco $D(0;1)$ para f.

19. Seja f holomorfa em $B(a;R)$, onde $R > 0$, com desenvolvimento $\sum c_n(z-a)^n$. Dado r tal que $0 < r < R$, mostre que
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum |c_n|^2 r^{2n}.$$

20 Seja $f : \Omega \to O$ um bi-holomorfismo, denotado por $w = f(z)$, com inversa $f^{-1} : O \to \Omega$ denotada por $z = f^{-1}(w)$. Consideremos um disco compacto $D = D(a;r) \subset \Omega$, com $r > 0$, e a bola aberta $B = B(a;r)$.

Mostre que a aplicação $f^{-1}\Big|_{f(B)} : f(B) \to B$ é dada pela fórmula
$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta, \text{ onde } w \in f(B).$$