1ª PROVA DE FUNÇÕES ANALÍTICAS- IMEUSP - MAT 5714

16 de setembro, 2014

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Nome : ____
NºUSP : ______________________
Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

A menos que alertado o contrário, as questões se referem a **funções analíticas ou a funções inteiras**, ambas no sentido de Weierstrass.
Justifique todas as passagens, com uma redação clara e não carregada em simbologia.
BOA SORTE!

1. (a) Expresse $f(z) = \frac{1}{(1-z)^3}$, para $|z| < 1$, como uma série de potências

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5 + \cdots .$$

Dicas. Propriedade para o produto ou teorema de derivação.

(b) Ache uma fórmula fechada para a função, definida por uma série de potências,

$$f(w) = \sum_{p=1}^{+\infty} p w^p, \text{ onde } |w| < 1.$$

(c) Mostre que se $|z| < 1$, então

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nz^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)^2}.$$

Sugestões. Expresse uma série como série dupla e justifique a troca de ordem no somatório (passe para famílias somáveis).

2. Mostre que se f é analítica em uma bola aberta $B(0;r)$ contendo o disco fechado $D(0;1)$, então deve existir n em $\mathbb{N}^*$ tal que

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \neq \frac{1}{n+1}.$$

3. Enuncie a desigualdade de Gutzmer-Parseval para séries de potências e o princípio do módulo máximo para um aberto conexo. A seguir, mostre que a desigualdade enunciada implica o princípio enunciado.

4. Enuncie o teorema fundamental da álgebra (TFA) e o teorema de Liouville para funções analíticas. A seguir, mostre que tal teorema de Liouville implica o TFA.

5. Enuncie o Lema de Schwarz e o Teorema de Liouville para funções inteiras. A seguir, mostre que tal lema implica tal teorema.

6. Sejam $f : B(0;1) \to B(0;1)$ analítica e dois pontos z e w, ambos em $B(0;1)$.

   (a) Mostre (Lema de Pick)

   $$\left|\frac{f(z)-f(w)}{1-f(z)\overline{f(w)}}\right| \leq \left|\frac{z-w}{1-z\overline{w}}\right|.$$

   (b) Mostre (Lema de Schwarz-Pick):

   $$|f'(z)| \leq \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}.$$

   (c) Seja g analítica em $B(0;2)$, limitada por 10 e tal que $g(1)=0$. Encontre o possivelmente melhor majorante para

   $$\left|g\left(\frac{1}{2}\right)\right|.$$

   Sugestão. Utilize os automorfismos analíticos $\phi_a : B(0;1) \to B(0;1)$, definidos por $\phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$, fixado um ponto a na bola $B(0;1)$.

7. Suponha que f é limitada e analítica em um aberto contendo $\{z : \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ e também que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Mostre que f é constante.

8. Seja f inteira e não constante. Definamos, para cada $r \in [0,+\infty)$,

   $$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)| \ \text{ e } \ m(r) = \inf_{|z|\leq r} |f(z)|.$$

   Prove que

   (a) $M(r)$ é contínua, estritamente crescente e $\lim\limits_{r\to+\infty} M(r) = +\infty$.

   (b) $m(r)$ é contínua, decrescente (talvez não estritamente) e $\lim\limits_{r\to+\infty} m(r) = 0$.

9. Seja $f(z) = \sum c_n z^n$ convergente em $B(0;1)$, com $f'(0) = c_1 \neq 0$ e $f(0) = c_0 = 0$. Isto é,

$$f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots, \text{ com } c_1 \neq 0, \text{ para todo } z \in B(0;1).$$

Exiba uma prova direta (isto é, sem auxílio do teorema de representação local), de que existe uma bola $B(0;r)$, com $r > 0$, na qual f é injetora.

Sugestão. Considere dois pontos a e b distintos em $B(0;1)$ e o quociente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

10. Seja $f : B(0;1) \to V$ analítica. Suponha que f é uma função bijetora. Justifique que V é um conjunto aberto. Mostre que se f' não se anula em nenhum ponto, então a função inversa

$$\varphi = f^{-1} : V \to B(0;1)$$

é complexa-derivável (i.e., holomorfa) em todo ponto de V.

11. Sejam f e g analíticas no aberto conexo limitado Ω e contínuas no compacto $\overline{\Omega}$. Mostre que a função

$$|f(z)| + |g(z)|, \text{ onde } z \in \overline{\Omega},$$

assume seu valor máximo na fronteira $\partial\Omega$.
Dica. Considere a função $f(z)\omega_1 + g(z)\omega_2$ para apropriados $\omega_1 \in S^1$ e $\omega_2 \in S^1$.

12. (a) Desenvolva a função

$$f(z) = \frac{1}{1 - z - 2z^2}$$

em uma série de potências centrada na origem e ache o raio de convergência.
Sugestão. Fatore o polinômio no denominador.

(b) Mostre que se $z \in \mathbb{C}$ é tal que $|z| < 1$, então

$$\frac{z}{1-z^2} + \frac{z^2}{1-z^4} + \cdots + \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} + \cdots = \frac{z}{1-z}.$$

13. Seja f analítica na bola $B(0;1)$ e satisfazendo

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}, \text{ para todo } z \in B(0;1).$$

Ache a melhor majoração de $\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!}$ fornecida pela desigualdade de Cauchy.
Sugestão. Estime o lado direito de $\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \leq \frac{M(r)}{r^n}$ [para $M(r)$ como usual].

14. (a) Mostre que não existe $f : B(0;1) \to \mathbb{C}$ analítica satisfazendo

$$|f^{(n)}(0)| > n!n^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(b) Suponha que $f(z) = \sum c_n z^n$ converge em $B(0;1)$. Mostre que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n!} z^n \text{ converge em } \mathbb{C}.$$

15. Seja f uma função inteira. Mostre que f é

(a) constante, se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{Re}(f(z)) \leq M$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

(b) um polinômio com grau$(f) \leq n$, se existem $M \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ e $r > 0$ tais que

$$|f(z)| \leq M|z|^n, \quad \text{para todo } z \text{ tal que } |z| > r.$$

16. (a) Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ inteira. Suponha que para todo ponto $\alpha \in \mathbb{C}$, ao menos um coeficiente na expansão em séries de potências

$$f(z) = \sum c_n (z - \alpha)^n,$$

é igual a 0. Prove que f é um polinômio.
Sugestão. Use que $c_n n! = f^{(n)}(\alpha)$ e use um argumento de contagem.

(b) Enuncie e prove um resultado análogo ao item (a), para funções analíticas $g : \Omega \to \mathbb{C}$, com Ω aberto e conexo.

17. Seja f analítica e não constante em um aberto e conexo Ω, prove que $\mathrm{Re}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ [as partes real e imaginária de f] não assumem máximo nem mínimo local.