MAT 5714 - Funções Analíticas - IMEUSP - Semestre 2 de 2014
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Lista 8 de Exercícios

Faça os exercícios abaixo com uma redação clara e não sobrecarregada em simbologia.

1* Sejam (X, d) um espaço métrico, $Y \subset X$ e o sub-espaço métrico (Y, d).

(a) Seja $C \subset Y$. Então, C é conexo segundo (Y, d) se e somente se C é conexo segundo (X, d). [Isto é, **o conceito de conexidade é absoluto**.]

(b) Seja $K \subset Y$. Então, K é compacto segundo (Y, d) se e somente se K é compacto segundo (X, d). [Isto é, **o conceito de compacidade é absoluto**.]

2* Seja Ω aberto, conexo e não vazio em $\mathbb{C}$. Seja $D(p; r)$ um disco fechado contido em Ω. Mostre que $\Omega \setminus D(p; r)$ é conexo.
Dica. Considere $B(p; R)$ com $D(p; r) \subset B(p; R) \subset \Omega$. Cheque que $B(p; R) \setminus D(p; r)$ é conexo. Considere uma cisão de $\Omega \setminus D(p; r)$ e derive uma contradição.

3* Seja (X, d) um espaço métrico **localmente compacto** [isto é, todo ponto de X tem uma vizinhança compacta] e um conjunto compacto K contido em X.

(a) Se F é fechado em X, então o sub-espaço métrico (F, d) é localmente compacto.

(b) Se $F \subset K$ e F é fechado em X, então F é compacto.

(c) Seja O um aberto contendo K. Então, existe uma vizinhança V de K que é compacta e contida em O. Isto é, V é compacta e existe um aberto U tal que

$$K \subset U \subset V \subset O.$$

4. Encontre as transformações lineares fracionárias que mapeiam, ordenadamente,

(a) $1, i, -1$ em $i, -1, 1$.

(b) $i, -1, 1$ em $-1, -i, 1$.

(c) $-1, -i, 1$ em $-1, 0, 1$.

(d) $-1, 0, 1$ em $-1, i, 1$.

5. Encontre as transformações lineares fracionárias que mapeiam, ordenadamente,

(a) $0, 1, \infty$ em $1, \infty, 0$.

(b) $0, 1, \infty$ em $1, -1, i$.

(c) $i, -1, 1$ em $1, 0, \infty$.

(d) $0, 1, 2$ em $1, 0, \infty$.