MAT 5714 - Funções Analíticas - IMEUSP - Semestre 2 de 2014
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Lista 7 de Exercícios

Os exercícios abaixo se referem a **funções analíticas ou a funções inteiras, ambas no sentido de Weierstrass**.

Prove suas afirmações, com uma redação clara e não sobrecarregada em simbologia.

1* (a) Seja Ω aberto e não vazio em $\mathbb{C}$. Mostre que Ω é conexo se e somente se Ω é conexo por caminhos.

(b) Dê um exemplo de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ que é conexo mas não é conexo por caminhos [verifique que o exemplo satisfaz o desejado].

2* Um aberto Ω, contido em $\mathbb{C}$, é dito **estrelado** se existe um ponto $p \in \Omega$ tal que para todo $z \in \Omega$, o segmento linear unindo p e z está contido em Ω. Um conjunto $X \subset \mathbb{C}$ é **convexo** se dados dois pontos arbitrários em X então o o segmento linear unindo tais dois pontos está contido em X. Prove o que segue.

(a) Se Ω é aberto e estrelado, então Ω é simplesmente conexo.

(b) O aberto $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ é estrelado (e simplesmente conexo).

(c) Todo aberto convexo é estrelado.

3* Seja Ω um aberto não vazio e arbitrário em $\mathbb{C}$. Seja (f_n) uma sequência de funções analíticas em Ω que converge compactamente a uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Mostre que:

(a) f é analítica em Ω.

(b) a sequência $(f_n^{(k)})$ converge compactamente a $f^{(k)}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

4* Prove o teorema Fundamental da Álgebra como um corolário do teorema de Rouché.

5* **Teorema (Hurwitz)** Sejam f e f_n, para $n = 1, 2, \ldots$, analíticas e não constantes em um aberto e conexo Ω. Suponhamos que

$$f_n \text{ converge compactamente a } f.$$

Seja $\alpha \in \Omega$ e $r > 0$, com $D(\alpha; r) \subset \Omega$. Seja $\gamma(t) = \alpha + re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Suponhamos que f não se anula na imagem de γ. Então, para todo n grande o suficiente, f_n e f tem o mesmo número de zeros no *interior* de γ.

6* Determine todos os pares de funções inteiras f e g que satisfazem

$$f^2(z) + g^2(z) = 1, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Sugestão. Teorema 8.8 nas notas de aula.

7. (a) Mostre que existe um índice $N \in \mathbb{N}$ tal que cada polinômio

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

tem um zero na bola $B(\pi; 1)$, para todo $n \geq N$.

(b) Mostre que para cada $R > 0$, se n é suficientemente grande então

$$P_n(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} \text{ não tem zeros em } D(0; R).$$

8. Verifique as afirmações abaixo sobre os polinômios apresentados.

(a) $p(z) = 2z^{10} + 4z^2 + 1$ e $q(z) = 2z^{10} - 4z^2 + 1$ tem exatamente dois zeros em $B(0; 1)$. **Sugestão.** Mostre que $|4z^2| > |2z^{10} + 1|$ para todo $z \in S^1$.

(b) $p(z) = z^5 + 13z^2 + 15$ tem

$$\text{dois zeros na coroa } \{z : 1 < |z| < 2\} \text{ e três zeros na coroa } \left\{z : 2 < |z| < \frac{5}{2}\right\}.$$

9. Suponha que f é inteira e que $f(z)$ é real se e somente se z é real. Use o princípio do argumento para mostrar que f tem no máximo um zero.

10. (a) Seja $p(z)$ um polinômio com coeficientes reais não negativos e, ainda,

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \text{ onde } 0 \leq a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n.$$

Mostre que todos os zeros de $p(z)$ estão dentro do disco unitário $D(0; 1)$. **Sugestão.** Aplique o teorema de Rouché à função $(1 - z)p(z)$.

(b) Prove que, para todo $0 < \rho < 1$, o polinômio

$$P_n(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + (n+1)z^n$$

não tem zeros na bola $B(0; \rho)$, se n é grande o suficiente.

11. Encontre o número de zeros de

(a) $f_1(z) = 3e^z - z$, no disco $D(0; 1)$.

(b) $f_2(z) = \frac{1}{3}e^z - z$, no disco $D(0; 1)$.

(c) $f_3(z) = z^4 - 5z + 1$, na coroa $\{z : 1 \leq |z| \leq 2\}$.

(d) $f_4(z) = z^6 - 5z^4 + 3z^2 - 1$, no disco $\{D(0; 1)$.

12. Seja $p(z) = z^5 + 11z + 9$. Quantos zeros p tem em cada um dos domínios:

$$(a)\ \left\{z : \frac{3}{4} < |z| < 1\right\} \qquad (b)\ \{z : 1 < |z| < 2\} \qquad (c)\ \{z : 2 < |z| < 3\}.$$

13. Mostre que na bola $B(0; 1)$ existem k soluções da equação

$$3z^k = e^z.$$

Sugestão. Teorema de Rouché.