MAT 5714 - Funções Analíticas - IMEUSP - Semestre 2 de 2014
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Lista 6 de Exercícios

Os exercícios abaixo se referem a **funções analíticas ou a funções inteiras, ambas no sentido de Weierstrass**.

Prove suas afirmações, com uma redação clara e não sobrecarregada em simbologia.

1. Seja $r > 0$. Seja $\gamma(t) = re^{it}$, onde $t \in [0, 2\pi]$. Mostre que
$$\text{Ind}(\gamma;\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{se } |\alpha| < r, \\ 0, & \text{se } |\alpha| > r. \end{cases}$$

2. Sejam $r > 0$, $p \in \mathbb{N}^*$ e $m \in \mathbb{N}^*$. Sejam ainda $\gamma(t) = re^{it}$, onde $0 \leq t \leq 2\pi p$, e $f(z) = z^m$. Considere a curva
$$\Gamma = f \circ \gamma.$$
Compute $\text{Ind}(\Gamma; 0)$. [Se $p = 1$, então m é o número de zeros de f no *interior* de γ.]

3. Consideremos o quadrado Q centrado na origem e de vértices
$$z_0 = z_4 = 1 + i, \quad z_1 = -1 + i, \quad z_2 = -(1 + i), \quad \text{e} \quad z_3 = 1 - i.$$
Consideremos as curvas (esboce os segmentos lineares)
$$\gamma_k(t) = z_k + (t - k)(z_{k+1} - z_k), \text{ onde } t \in [k, k+1], \text{ para } k = 0, 1, 2, 3.$$
Seja $\gamma : [0, 4] \to \mathbb{C}$ dada pela justaposição $\gamma = \gamma_0 \vee \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3$. Isto é, temos $\gamma(t) = \gamma_k(t)$ se $t \in [k, k+1]$ e γ é a fronteira do quadrado Q. Mostre que
$$\text{Ind}(\gamma; 0) = \text{Ind}(\gamma_0; 0) + \text{Ind}(\gamma_1; 0) + \text{Ind}(\gamma_2; 0) + \text{Ind}(\gamma_3; 0).$$
Mostre que $\text{Ind}(\gamma_k; 0) = \frac{1}{4}$ para $k = 0, 1, 2, 3$. Mostre então que $\text{Ind}(\gamma; 0) = 1$.

4. Seja $R > 1$ e γ o semi-círculo orientado no sentido anti-horário (esboce) dado por
$$\gamma(t) = \begin{cases} Re^{it}, & \text{se } 0 \leq t \leq \pi \\ t - (\pi + R), & \text{se } \pi \leq t \leq \pi + 2R. \end{cases}$$
Mostre que $\text{Ind}(\gamma; i) = 1$.

5. Seja γ a figura oito (esboce a curva) dada por
$$\gamma(t) = \begin{cases} 1 - e^{it}, & \text{se } t \in [0, 2\pi], \\ -1 + e^{-it}, & \text{se } t \in [2\pi, 4\pi]. \end{cases}$$
Mostre que $\text{Ind}(\gamma; 1) = 1$, $\text{Ind}(\gamma; -1) = -1$ e $\text{Ind}(\gamma; i) = 0$.

6* Sejam $a \neq 0$ e $z_1, \ldots, z_m$ tais que $|z_j| \neq 1$ para $j = 1, \ldots, m$. Consideremos
$$p(z) = a(z - z_1)\cdots(z - z_m).$$
Seja $\gamma(t) = e^{it}$, para $t \in [0, 2\pi]$. Mostre que
$$\text{Ind}(p \circ \gamma; 0) \text{ é o número de } z_{j's} \text{ no interior de } \gamma.$$

Resolva cinco dos 17 exercícios da prova P1.