**MAT 5714 - Funções Analíticas - IMEUSP** - Semestre 2 de 2014

*Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira*

**Lista 5 de Exercícios**

Notação: $\Omega$ é um **aberto não vazio**. A menos que alertado o contrário, os exercícios e resultados citados se referem a **funções analíticas ou a funções inteiras, ambas no sentido de Weierstrass**. Os exercícios destacados com * serão bastante usados.

Prove suas afirmações, com uma redação clara e não sobrecarregada em simbologia.

1* Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto conexo e não vazio e $a \in \Omega$. Mostre que $\Omega \setminus \{a\}$ é conexo.

2* Sejam $(X, d)$ um espaço métrico e $C$ um subconjunto conexo de $X$. Mostre que

$$\text{se } \ C \subset D \subset \overline{C}, \quad \text{então } D \text{ é conexo.}$$

3*. Seja $\mathcal{F}$ uma família em $\mathcal{A}(\Omega)$ e localmente limitada. Demonstre, utilizando o Lema de Schwarz, que $\mathcal{F}$ é equicontínua sobre cada compacto $K$ contido em $\Omega$.
Sugestões. Mostre as afirmações abaixo (e depois conclua com o Lema de Schwarz).

(a) Existe $r > 0$ tal que $K(r) = \{z : d(z; K) \leq r\} \subset \Omega$. Ainda, $K(r)$ é compacto.

(b) Existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$, para toda $f \in \mathcal{F}$ e para todo $z$ em $K(r)$.

(c) Dados quaisquer $a \in K$ e $f \in \mathcal{F}$, a função $\widetilde{f}(z) = \frac{f(a+rz)-f(a)}{2M}$ aplica o disco $D(0;1)$ em $D(0;1)$ e satisfaz $\widetilde{f}(0) = 0$.

4*. Mostre que se $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(\Omega)$ é uma família normal (relativamente compacta) então

$$\mathcal{F}^{(k)} = \{f^{(k)} : \ f \in \mathcal{F}\}$$

é uma família normal para cada $k$ em $\mathbb{N}$.

5. Verifique as seguintes famílias de funções são normais (relativamente compactas).

(a) $\mathcal{F} = \{f : \Omega \to B(a; r) \text{ tal que } f \text{ é analítica}\}$.

(b) $\mathcal{G} = \{f : B(0;1) \to \mathbb{C} \text{ tal que } f(z) = \sum a_n z^n \text{ e } |a_n| \leq 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$.

6* Demonstre que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

7*. Verifique as fórmulas, para $z$ e $w$ arbitrários no plano complexo,

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1, \\ \operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w, \\ \cos(z + w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w. \end{cases}$$

8. Mostre que a seguinte função não é complexa-derivável (i.e., holomorfa),

$$f(z) = \begin{cases} e^{-z^4}, & \text{se } z \in \mathbb{C}^*, \\ 0, & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

mas valem as equações de Cauchy-Riemann em todo ponto. Compare tal exemplo com o teorema de Looman-Menshov em Narasimhan & Nievergelt, 2nd ed., p. 7.