MAT 5714 - Funções Analíticas - IMEUSP - Semestre 2 de 2014

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Lista 10 de Exercícios

Faça os exercícios abaixo com uma redação clara e não sobrecarregada em simbologia.

1. Mostre que

   (a) $|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z|e^{|z|}$, para todo $z \in \mathbb{C}$. (b) $|e^z - 1| \geq \frac{1}{4}|z|$, se $0 < |z| < 1$.

2* Dada $F : \Omega \to \mathbb{R}$, com Ω um aberto de $\mathbb{R}^2$ e F diferenciável, um ponto $P_0 \in \Omega$ é um **ponto de sela** de f se P_0 é um **ponto crítico** de F [isto é, as derivadas parciais $F_x(P_0)$ e $F_y(P_0)$ são nulas] mas não um ponto de máximo, ou mínimo, local de f.

   (Paisagem Analítica). Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica e z_0 em $\mathbb{C}$. Mostre que z_0 é ponto de sela da função a valores reais $|f| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se e somente se $f'(z_0) = 0$ e $f(z_0) \neq 0$.

3. Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}^*$ contínua e fechada. Mostre as propriedades abaixo.

   (a) $\text{Ind}\left(\frac{1}{\gamma}; 0\right) = -\text{Ind}(\gamma; 0)$.

   (b) $\text{Ind}\left(\frac{1}{\gamma}; \alpha\right) = \text{Ind}\left(\gamma; \frac{1}{\alpha}\right) - \text{Ind}(\gamma; 0)$, se α e $\frac{1}{\alpha}$ não pertencem a Imagem(γ).

   Sugestão. $$\gamma\left(\frac{1}{\gamma} - \alpha\right) = -\alpha\left(\gamma - \frac{1}{\alpha}\right).$$

   (c) Verifique o item (b) explicitamente, para $\gamma(t) = e^{it}$, com $0 \leq t \leq 2\pi$, nos pontos
   $$\alpha = 1/2 \quad \text{e} \quad \alpha = 2.$$

4. Seja $\gamma_m : [a, b] \to \mathbb{C}$, com $m \in \mathbb{N}$, uma sequência de curvas fechadas contínuas que converge uniformemente à curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Seja $\alpha \notin$ Imagem(γ). Mostre que
   $$\text{Ind}(\gamma_m; \alpha) = \text{Ind}(\gamma; w), \quad \text{para todo } m \text{ grande o suficiente.}$$

5. Seja γ uma curva contínua e fechada, com $\text{Ind}(\gamma; \alpha) \in \{0, 1\}$ para todo $\alpha \notin$ Imagem(γ). Sejam $p(z)$ e $q(z)$ polinômios que não se anulam em Imagem(γ), e a função racional
   $$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)}.$$
   Seja $I(\gamma)$ o interior de γ. Mostre que $\text{Ind}(r \circ \gamma; 0)$ é o número de zeros de p em $I(\gamma)$ menos o número de zeros de q em $I(\gamma)$.

6* Sejam Γ uma circunferência (generalizada), determinada pelos pontos z_2, z_3 e z_4, e dois pontos z e z^* simétricos [v. definição na Lista 9, exercício 10] em relação a Γ.

(a) Suponha que Γ é uma linha reta. Mostre que então o segmento linear conectando z e z^* é perpendicular a Γ e que z e z^* são equidistantes de Γ.

(b) Suponha Γ uma circunferência: $\Gamma = \{\zeta : |\zeta - a| = R\}$, com $0 < R < \infty$. Prove que

$$\frac{z^* - a}{z - a} = \frac{R^2}{|z - a|^2} \quad \text{(um número real maior que 0)}$$

e então que $|z - a|\,|z^* - a| = R^2$.

(c) Suponha que z está no interior de Γ. Mostre que z^* está no exterior de Γ.

(d) Esboce a circunferência Γ e a semi-reta com início em a e pelo ponto z. Ache, de forma precisa e com uma construção geométrica, o ponto z^* em tal semi-reta,

7* Seja Ω um aberto conexo tal que $0 \notin \Omega$. Seja Ω^* o simétrico de Ω em relação à circunferência S^1. Isto é, $\Omega^* = \{z^* : z \in \Omega\}$, com z^* o simétrico de z em relação a S^1.

(a) Mostre que $\Omega^* = \{\frac{1}{\bar{z}} : z \in \Omega\}$.

(b) Se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, defina $f^* : \Omega^* \to \mathbb{C}$ por

$$f^*(z) = \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}.$$

Mostre que f^* é holomorfa.

(c) Suponha que Ω é simétrico em relação a S^1. Isto é, $\Omega^* = \Omega$. Suponha que f é holomorfa em Ω e que $f(z) \in \mathbb{R}$, para todo $z \in \Omega \cap S^1$. Mostre que então

$$f^* = f.$$

(d) Enuncie e prove uma versão do **Princípio da Reflexão de Schwarz** (Teorema 10.21) em que a reta real é substituída por S^1.

==

Notações para os exercícios 8, 10 e 11.

- Seja Ω um aberto conexo. Seja γ uma curva em Ω, contínua e fechada, e Ω-homotópica a um ponto [logo, $\text{Ind}_\gamma \equiv 0$ em $\mathbb{C} \setminus \Omega$] e tal que $\text{Ind}_\gamma \equiv 1$ em seu interior $I(\gamma)$.

- Seja f uma função holomorfa/analítica em Ω e não se anulando em Imagem(γ). Indicamos o número de zeros de f em $I(\gamma)$, com suas multiplicidades, por $Z(f;\gamma)$.

8* **Princípio do Argumento para holomorfas.** Se γ é de classe C^1 por partes, então

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz = Z(f;\gamma).$$

Sugestão. Teorema 7.21 e Teorema 10.10 nas notas de aula.

9* (a) Prove que a associação

$$F \mapsto \frac{F'}{F},$$

com F derivável, transforma produtos em somas.

(b) Se $P(z) = (z - a_1)\cdots(z - a_n)$, com $a_1, \ldots, a_n$ as raízes de $P(z)$, o que é $\frac{P'}{P}$?

(c) Seja σ uma curva fechada e C^1 por partes que não passa por nenhuma das raízes do polinômio $P(z)$ no item anterior. Mostre que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{P'(z)}{P(z)}dz = \mathrm{Ind}(\sigma; a_1) + \cdots + \mathrm{Ind}(\sigma; a_n).$$

(d) **Derivada Logarítmica**. Seja f holomorfa em Ω e com um número finito de zeros de ordens $m_1, \ldots, m_n$ respectivamente. Consideremos a fatoração $f(z) = (z - z_1)^{m_1}\cdots(z - z_n)^{m_n} g(z)$ com g holomorfa e não se anulando em Ω. Prove:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_1}{z - z_1} + \cdots + \frac{m_n}{z - z_n} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

10* **(Segundo) Princípio do Argumento para quociente de analíticas**. Se

$$f = \varphi g, \text{ com } \varphi \text{ e } g \text{ analíticas em } \Omega,$$

então

$$Z(\varphi; \gamma) = Z(f; \gamma) - Z(g; \gamma).$$

Sugestão. Teorema 7.21.

11* **Princípio do Argumento p/ quociente de holomorfas**. Se γ é C^1 por partes e

$$f = \varphi g, \text{ com } \varphi \text{ e } g \text{ analíticas em } \Omega.$$

Prove que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi'}{\varphi} = Z(f; \gamma) - Z(g; \gamma).$$

Fim das notações específicas adotadas para os exercícios 8, 10 e 11.

===

12. Considere a função $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$. Determine $\exp(\Omega)$, para as faixas horizontais

(a) $\Omega = \{z : \mathrm{Re}(z) < 0 \text{ e } |\mathrm{Im}(z)| < \pi\}$.

(b) $\Omega = \{z : |\mathrm{Im}(z)| < \frac{\pi}{2}\}$.

(c) Considere a faixa $O = \{z : |\mathrm{Im}(z)| < \pi/2\}$ e a função

$$g(z) = \frac{e^z - 1}{e^z + 1}.$$

Identifique a imagem $g(O)$ [note que $g(z) = \tanh(z/2)$].

13** Prove os resultados abaixo (sem a teoria de séries).

(a) (**Desigualdades de Cauchy**). Usando a fórmula integral para as derivadas sucessivas de uma $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa, dê uma limitação para as derivadas

$$f^{(n)}(a), \text{ fixados } a \in \Omega \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

(b) (**Teorema de Liouville**). Utilizando a fórmula integral de Cauchy, prove que se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é holomorfa e limitada então f é constante.

(c) (**Teorema de Liouville estendido**). Prove que se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é holomorfa e existe $r > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(z)| < |z^n|, \quad \text{para todo } |z| > r,$$

então f é um polinômio de grau menor ou igual a n.

14. Seja f holomorfa e limitada em $\mathbb{C}$. Prove o **teorema de Liouville** calculando

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz, \text{ onde } |a| < R \text{ e } |b| < R,$$

e então passando ao limite para $R \to \infty$.

15. Seja $f(z)$ analítica em $B(0;1)$ com $f'(z)$ limitada em $B(0;1)$. Mostre que f pode ser estendida continuamente a $D(0;1)$.

16. Seja ϕ analítica em $D(0;1)$. Prove que existe ζ em $S^1 = \{\zeta : |\zeta| = 1\}$ tal que

$$\left| \frac{1}{\zeta} - \phi(\zeta) \right| \geq 1.$$

17. Seja Ω aberto, com $D(0;1) \subset \Omega$. Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa e tal que $|f(z)| < 1$ se $|z| = 1$. Mostre que f tem no máximo um número finito de pontos fixos em $D(0;1)$.

18. (a) Sejam $f = u + iv$ holomorfa em $B(\alpha; R)$. Mostre que

$$\int_\gamma \frac{iu+v}{(z-\alpha)^2} dz = 0, \qquad \text{onde } \gamma(\theta) = \alpha + re^{i\theta}, \text{ com } 0 < r < R \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

(b) Calcule $f(1)$, onde f é holomorfa em $\mathbb{C}$ e satisfaz

$$f(z) = \int_{|w|=1} \frac{w^2 e^w}{w-z} dw, \text{ para todo } z \in B(0;1).$$

19* Enuncie o **Teorema Fundamental da Álgebra** e a **Fórmula do Valor Médio (Gauss)**. Prove então o TFA através de tal fórmula.

20. Mostre que a integral abaixo independe do valor real a:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+ia)^2} dx.$$

21. Seja $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ e

$$f(z) = \int_0^1 \frac{e^{it}}{t-z} dt, \text{ para cada } z \in \Omega.$$

Mostre que f é analítica em Ω e determine a série de potências que representa f, em uma vizinhança de um ponto arbitrário $a \in \Omega$.

22. (a) Existe ou não uma sequência de polinômios que converge uniformemente em $D(0;1)$ para $g(z) = \overline{z}$? Justifique a sua resposta.
    (b) Seja $f : D(0;1) \to \mathbb{C}$ contínua e holomorfa em $B(0;1)$. Mostre que existe uma sequência de polinômios que converge uniformemente em $D(0;1)$ para f. Sugestão. Considere funções do tipo $f_r(z) = f(rz)$, onde $0 < r < 1$ e $|z| < \frac{1}{r}$.

23* [Utilize a teoria de integração e não a teoria de séries.] Seja Ω aberto em $\mathbb{C}$ e (f_n) uma sequência de funções holomorfas em Ω que converge uniformemente para f em cada subconjunto compacto de Ω. Mostre que f é holomorfa em Ω e que

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(z) = f^{(k)}(z), \text{ para quaisquer } z \in \Omega \text{ e } k \in \mathbb{N}.$$

24. Seja f holomorfa em $B(0;1)$ e tal que $f(0) = 0$. Mostre que

$$f(z) + f(z^2) + \cdots + f(z^n) + \cdots$$

é holomorfa em $B(0;1)$.

25* Seja f holomorfa em $B(a;R)$, onde $R > 0$, com desenvolvimento $\sum c_n(z-a)^n$. Dado r tal que $0 < r < R$, mostre que

(Identidade de Gutzmer-Parseval) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum |c_n|^2 r^{2n}.$$

26* Resolva este exercício de forma distinta e independente do próximo exercício (a respeito do teorema de Riemann sobre remoção de singularidades). Considere um aberto Ω, um ponto $\alpha \in \Omega$ e uma função $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{\alpha\})$. Prove as afirmações.

(a) Se f é limitada em $B(\alpha; r) \setminus \{\alpha\}$, onde $r > 0$, então temos

$$\int_{\partial\Delta} f = 0$$

para todo triângulo fechado e convexo contido em Ω.

(b) Se f é contínua no ponto α, então f é holomorfa em Ω.

27* **Teorema de Riemann sobre Remoção de Singularidades.** Seja $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ e com f limitada em $B(a; r) \setminus \{a\}$, para algum $r > 0$. Mostre que podemos definir f no ponto a de forma que a extensão $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é holomorfa em Ω.

28* **Fórmula para a Função Inversa**. Seja $f : \Omega \to O$ um bi-holomorfismo, denotado por $w = f(z)$, com inversa $f^{-1} : O \to \Omega$ denotada por $z = f^{-1}(w)$. Consideremos um disco compacto $D = D(a; r) \subset \Omega$, com $r > 0$, e a bola aberta $B = B(a; r)$. Mostre que a aplicação $f^{-1}\big|_{f(B)} : f(B) \to B$ é dada pela fórmula

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta, \text{ onde } w \in f(B).$$

Sugestão. Exercício 26 ou Exercício 27.