$1^{\underline{a}}$ Prova de MAT 236 - Funções Diferenciáveis e Séries - IMEUSP
02/05/2022

Q	N
1	
2	
3	
4	
Total	

Nome : ______________________________
$N^{\underline{o}}$USP : ______________________________
Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Justifique todas as passagens.
Boa Sorte!

1. Suponhamos que todas as funções a seguir são diferenciáveis. Sejam $F(x,y,z)$ e $G(x,y,z)$, com $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, e $y = y(x)$ e $z = z(x)$, com $x \in \mathbb{R}$, satisfazendo

$$\begin{cases} F(x,y(x),z(x)) & = 2020 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \\ G(x,y(x),z(x)) & = 2021 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \\ (0,y(0),z(0)) & = (0,0,0). \end{cases}$$

Suponha ainda que

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(0,0,0) = 2, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(0,0,0) = 3, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(0,0,0) = 4, \\ \\ \frac{\partial G}{\partial x}(0,0,0) = 4, \quad \frac{\partial G}{\partial y}(0,0,0) = 6, \quad \frac{\partial G}{\partial z}(0,0,0) = 9. \end{cases}$$

Determine os valores de

$$\frac{dy}{dx}(0) = y'(0) \qquad \text{e} \qquad \frac{dz}{dx}(0) = z'(0).$$

Solução.

Pela regra da cadeia temos, derivando as duas primeiras equações do sistema acima em relação a x e avaliando as derivadas em $x = 0$,

$$\begin{cases} F_x(0,0,0).1 + F_y(0,0,0)y'(0) + F_z(0,0,0)z'(0) = 0 \\ \\ G_x(0,0,0).1 + G_y(0,0,0)y'(0) + G_z(0,0,0)z'(0) = 0. \end{cases}$$

Substituindo os valores dados obtemos

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'(0) \\ z'(0) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Então, pela regra de Cramer concluímos

$$y'(0) = - \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}} = -\frac{2}{3} \quad \text{e} \quad z'(0) = - \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}} = -\frac{0}{3} = 0 \clubsuit$$

2. Resolva o que segue.

(a) Esboce a intersecção da superfície $x^2+y^2+z^2=4$ com o plano $x+y+z=1$.

(b) Maximize a função $f(x,y,z)=x+2y+3z$, com (x,y,z) pertencente à intersecção descrita em (a).

Solução.

(a) A superfície é a esfera de centro na origem e de raio $r=2$. O plano não passa pela origem. A intersecção K é então uma circunferência contida na esfera (e no plano) e o centro desta circunferência não é a origem. A intersecção K é então limitada e fechada (o complementar é uma união de dois abertos e portanto aberto) e, assim, compacta.

(b) A função $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ é de classe C^∞, logo contínua, e pelo teorema de Weierstrass segue que f restrita a K admite mínimo e máximo em K.

Cosideremos as funções $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ e $h(x,y,z)=x+y+z$. Tais funções são de classe C^∞. Temos $K=g^{-1}(4)\cap h^{-1}(1)$. Temos também

$$\nabla g=(2x,2y,2z) \ \text{ e } \ \nabla h=(1,1,1).$$

Mostremos que tais vetores são LI em todo ponto de K.

Suponhamos que exista $x,y,z,)\in K$ tal que $\{\nabla g,\nabla h\}$ é LD. Então é facil ver que temos $x=y=z$. Analisando o sistema

$$\begin{cases} x=y=z \\ x^2+y^2+z^2=4 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

obtemos

$$3x^2=4 \ \text{ e } \ 3x=1.$$

Absurdo! Logo, ∇g e ∇h são LI sobre K.

Podemos então aplicar o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange. Assim, os pontos extremantes (x,y,z) de f na intersecção K satisfazem a equação $\nabla f(x,y,z)=\lambda_1\nabla g(x,y,z)+\lambda_2\nabla h(x,y,z)$, para certos reais λ_1 e λ_2. Como $\{\nabla g,\nabla h\}$ é LI em K, temos

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Donde segue $(2y-2z)-2(2x-2z)+3(2x-2y)=0$. Logo, $x-2y+z=0$. Como $(x,y,z)\in K$, temos então

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$$

Das duas primeiras equações segue $3y = 1$ e

$$y = \frac{1}{3}.$$

Então, da primeira equação segue

$$z = \frac{2}{3} - x.$$

Substituindo tais valores para y e z na terceira encontramos

$$x^2 + \frac{1}{9} + \left(\frac{2}{3} - x\right)^2 = 4.$$

Logo,

$$2x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = 4.$$

Segue

$$x^2 - \frac{2}{3}x = 2 - \frac{5}{18} = \frac{31}{18}.$$

Donde

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} = \frac{31}{18}$$

e

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{33}{18} = \frac{11}{6}.$$

Logo,

$$x = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{11}{6}} = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{66}}{6}.$$

Os pontos extremantes são

$$P = \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{66}}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{66}}{6}\right) \text{ e } Q = \left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{66}}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{66}}{6}\right).$$

O ponto de máximo é P e o valor máximo é

$$f(P) = 2 + \frac{\sqrt{66}}{3}.$$

O ponto de mínimo é Q e o valor mínimo é

$$f(Q) = 2 - \frac{\sqrt{66}}{3} \clubsuit$$

3. Resolve o que segue.

(a) Esboce a superfície
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1.$$
e verifique que ela é um conjunto compacto (isto é, fechado e limitado).

(b) Determine o paralepípedo-retângulo P de volume máximo, com arestas paralelas aos eixos coordenados, inscrito na (envolto pela) superfície acima.

Dica. Observe (desenhe) que o paralelepípedo P em questão está centrado na origem $(0,0,0)$ e pode ser escrito na forma $P=[-x,x]\times[-y,y]\times[-z,z]$, para específicos $x>0$, $y>0$ e $z>0$ a serem determinados. Escreva a fórmula $V=V(x,y,z)$ para o volume de P.

Solução.

(a) A superfície é um elipsóide com centro na origem $(0,0,0)$ e com *polos* $(\pm2,0,0)$, $(0,\pm3,0)$ e $(0,0,\pm4)$.

(b) O paralelepípedo procurado se enontra centrado na origem e tem o formato $[-x,x]\times[-y,y]\times[-z,z]$, com $x>0$, $y>0$ e $z>0$ e, ainda, com (x,y,z) pertencente à superfície elipsoidal e portanto satisfazendo
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1.$$
Os oito pontos $(\pm x,\pm y,\pm z)$ pertencem ao elipsóide e são os oito vértices do paralelepípedo.

O volume deste paralelepípedo é $F(x,y,z)=8xyz$. No ponto de máximo (tal problema não tem um ponto de minimo), o método dos multiplicadores de Lagrange garante que
$$(8yz,8xz,8xy)=\lambda\left(\frac{2x}{4},\frac{2y}{9},\frac{2z}{16}\right).$$
Donde segue (pois x, y e z são estritamente positivos)
$$\frac{8yz}{\frac{2x}{4}}=\frac{8xz}{\frac{2y}{9}}=\frac{8xy}{\frac{2z}{16}}\Longrightarrow\frac{16yz}{x}=\frac{36xz}{y}=\frac{64xy}{z}.$$
Donde segue
$$\begin{cases}\frac{16yz}{x}=\frac{36xz}{y}\\[2ex]\frac{36xz}{y}=\frac{64xy}{z}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\frac{16y}{x}=\frac{36x}{y}\\[2ex]\frac{36z}{y}=\frac{64y}{z}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}16y^2=36x^2\\[2ex]36z^2=64y^2.\end{cases}$$
Donde segue
$$y=\frac{3x}{2}\quad\text{e}\quad z=\frac{4y}{3}=2x.$$
Substituindo $y=3x/2$ e $z=2x$ na equação do elipsóide encontramos
$$\frac{3x^2}{4}=1\Longrightarrow x=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$
O paralelepípedo procurado é
$$\left[-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right]\times\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]\times\left[-\frac{4}{\sqrt{3}},\frac{4}{\sqrt{3}}\right]\ \clubsuit$$

4. Encontre uma função infinitamente diferenciável $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que seja **um contra-exemplo** para a afirmação que segue.

> *Existe um ponto* $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *satisfazendo*
>
> $$F\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = JF\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right].$$

Observação. Aqui, empregamos a notação vetor-coluna. O símbolo " $\times$ " indica um produto matricial, de uma matriz jacobiana (tamanho 2×2) por uma matriz-coluna (tamanho 2×1).

Solução.

Consideremos a função

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2y^2 \\ \frac{x^2+y^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Obviamente, F é infinitament diferenciável. Temos

$$F\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Temos também

$$JF\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy^2 & 2x^2y \\ x & y \end{pmatrix}.$$

Suponhamos que exista um ponto (a, b) satisfazendo

$$F\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = JF\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right].$$

Sob tal hipótese segue

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ab^2 & 2a^2b \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{cases} 2a^2b + 2ab^2 = 1 \\ a + b = 1. \end{cases}$$

Donde segue

$$\begin{cases} 2ab(a+b) = 1 \\ a+b = 1. \end{cases}$$

Portanto, $2ab = 1$ e $(a+b)^2 = 1$. Chegamos a

$$\begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 = 1 \\ 2ab = 1. \end{cases}$$

Donde segue

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

Absurdo! ♣