MAT 236 - FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS E SÉRIES - IMEUSP

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Primeiro Semestre de 2022

5ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Determine $\sup X$, $\inf X, \max X$ e $\min X$ em cada um dos seguintes casos:

a) $X =]a,b[\,,\ \ ]a,b]\,,\ \ [a,b[$ ou $[a,b]$; com $a,b \in \mathbb{R}$ e $a < b$.

b) $X =]-\infty,a]\,,\ \ [a,+\infty[\,,\ \ ]-\infty,a[$ ou $X =]a,+\infty[$; com $a \in \mathbb{R}$.

c) $X = \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $X = \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

2. Sejam X e Y dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$, com $X \subset Y$. Verifique que

$$\inf Y \leq \inf X \leq \sup X \leq \sup Y \ .$$

3. Seja X e Y subconjuntos não vazios e limitados em $\mathbb{R}$. Definamos o conjunto $X + Y = \{x + y : x \in X \text{ e } y \in Y\}$. Verifique as afirmações abaixo.

(a) $X + Y$ é limitado

(b) $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$

(c) $\inf(X + Y) = \inf X + \inf Y$.

4. Seja X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$. Suponha que X é limitado inferiormente e defina $-X = \{-x \mid x \in X\}$. Verifique que o conjunto $-X$ é limitado superiormente e que $\sup(-X) = -\inf X$.

5. Seja X um subconjunto não vazio e limitado em $\mathbb{R}$. Dado $c \in \mathbb{R}^*_+ = (0,+\infty)$, mostre que o conjunto $cX = \{cx \mid x \in X\}$ é limitado e

$$\sup(cX) = c \sup X \quad \text{e} \quad \inf(cX) = c \inf X \ .$$

Enuncie e verifique o que ocorre se $c < 0$.

6. Sejam X e Y subconjuntos não vazios e limitados em $\mathbb{R}^*_+ = (0,+\infty)$. Defina $X \cdot Y := \{xy \mid x \in X \ \text{ e } \ y \in Y\}$. Verifique que $X \cdot Y$ é limitado e que

$$\sup(X \cdot Y) = \sup X \sup Y \ \text{ e } \ \inf(X \cdot Y) = \inf X \inf Y \ .$$

Atenção: esta observação é importante.

7. Calcule, caso exista, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ para

(a) $a_n = \frac{n^3+3n+1}{4n^3+2}$.

(b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

(c) $a_n = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\,dx\,, \alpha \geq 1$.

(d) $a_n = \int_0^n \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

(e) $a_n = \frac{n+1}{\sqrt[3]{n^7+2n+1}}$.

(f) $a_n = \operatorname{sen}\frac{1}{n}$.

(g) $a_n = n\operatorname{sen}\frac{1}{n}$.

(h) $a_n = \frac{1}{n}\operatorname{sen}(n)$.

8. Sejam (x_n) e (y_n) sequências limitadas em $\mathbb{R}$. Verifique que

(a) $\liminf x_n + \liminf y_n \leq \liminf(x_n + y_n)$

(b) $\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$

(c) $\liminf(-x_n) = -\limsup x_n$ e $\limsup(-x_n) = -\liminf x_n$.

Ainda mais, se $x_n \geq 0$ e $y_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então

(d) $(\liminf x_n)(\liminf y_n) \leq \liminf(x_n y_n)$

(e) $\limsup(x_n y_n) \leq (\limsup x_n)(\limsup y_n)$.

9. Mostre que a sequência $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ... é convergente a 2.

10. Calcule:

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n$ (b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ $(x \in \mathbb{R})$

(c) $\lim\limits_{n\to-\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ $(x \in \mathbb{R})$

11. Suponha que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. Verifique que:

(a) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n} = a\ .$$

(b) $$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots\ldots a_n} = a\,, \quad \text{se } a > 0 \text{ e } a_n > 0\,, \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Sugestão: Em (b), utilize a função logaritmo natural e o item (a).

12. Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ para

(a) $a_n = \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\frac{1}{n}}{n}$ (b) $a_n = \dfrac{2+\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}+\ldots\ldots+\sqrt[n]{2}}{n}$.

Sugestão: Utilize o exercício 13.

13. Sejam $a > 0$ e $b > 0$. Mostre que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max(a, b) \ .$$

14. Calcule os limites da razão, $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, e da raiz, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$, ou pelo menos um deles, em cada um dos casos abaixo.

$(a) \quad a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ $\qquad (b) \quad a_n = n$

$(c) \quad a_n = \dfrac{1}{n^p} \ , p \in \mathbb{R} \,,$ $\qquad (d) \quad a_n = \dfrac{1}{(\ln\, n)^p} \ .$

15. Seja $(a_n) \subset \mathbb{R}\,, a_n > 0$. Mostre que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \ .$$

Retorne ao exercício 14 e, se necessário, complete-o.

16. Mostre que se $\lim z_n = 0$ e (w_n) é limitada então, $\lim z_n w_n = 0$.

18. Seja $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, e $a_j \in \mathbb{C}$, para $j = 0, ..., n$. Seja z_0 arbitrário em $\mathbb{C}$. Mostre que existem coeficientes $b_0, ..., b_n$ em $\mathbb{C}$ tais que

$$p(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \cdots + b_n(z - z_0)^n \ , \forall\, z \in \mathbb{C} \ .$$

Sugestão: escreva $p(z) = p(z - z_0 + z_0)$.