**Lista 4 de Execícios - MAT 236 - Funções Diferenciáveis e Séries- IME**
**Primeiro semestre de 2022**
*Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira*

1. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe $C^1$ e escrevamos $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$. Suponhamos que a matriz jacobiana de $F$ na origem é dada por

$$JF(0,0) = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Considere a função $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$G(x, y) = F(2x - 3y, -5x + 8y).$$

Note que $G(0, 0) = F(0, 0)$.

(a) Compute a matriz jacobiana de $G$ na origem. Isto é, compute

$$JG(0,0).$$

**Dica.** Escrevendo $G(x, y) = (G_1(x, y), G_2(x, y))$ e

$$(G_1(x, y), G_2(x, y)) = (F_1(2x - 3y, -5x + 8y), F_2(2x - 3y, -5x + 8y)),$$

compute as derivadas parciais de $G_1$ e $G_2$ através da trivial regra da cadeia do Cálculo II (isto é, a conhecida regra da cadeia para funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$).

(b) Explique o resultado obtido em (a).

(c) Considere a aplicação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (2x - 3y, -5x + 8y).$$

Encontre uma fórmula (uma identidade) relacionando as funções $G$, $F$ e $T$.

(d) Encontre $M$, a matriz de $T$ em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$.

(e) Encontre a matriz jacobiana $JG(0, 0)$.

(f) Ache uma identidade relacionando as matrizes $JF(0, 0)$, $JG(0, 0)$ e $M$.

(g) Trocando a notação vetor-linha empregada acima para a notação vetor-coluna, escreva uma fórmula relacionando

$$G,\ F,\ M \text{ e } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**Observação.** Também as funções $G$ e $F$ são aqui dadas por vetores-colunas.

(h) Note que o vetor-linha $X = (x, y)$ é uma matriz (uma matriz-linha) em $M_{1\times 2}(\mathbb{R})$. Com a notação usual para matriz transposta, o vetor/matriz $X^t = (x, y)^t$ é um vetor-coluna (duas linhas, uma coluna). Isto é,

$$X^t = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Encontre uma fórmula relacionando $G$, $F$, $M$ e $X^t$.

2. Encontre uma função infinitamente diferenciável $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ que seja um contra-exemplo para a afirmação que segue. [Aqui, empregamos a notação vetor-coluna.]

$$\boxed{\begin{array}{l}\textit{Existe um ponto } \begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \textit{ satisfazendo}\\[2ex] F\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-F\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=JF\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\times\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right].\end{array}}$$

==========================================

*Os quatro próximos exercícios fazem parte de um conjunto e antecipam um argumento muito importante para obtermos provas muito simples para a parte* unicidade *do Teorema da Função Implícita (e para seu primo, o Teorema da Função Inversa).*

3. Sejam $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, contínuas. Mostre as afirmações abaixo.

   (a) Se $f(0)-g(0)\neq 0$, então existe um intervalo $(-r;r)$, com $r>0$, tal que temos
   $$f(x)-g(y)\neq 0,\ \text{para todo } (x,y)\in(-r,r)\times(-r,r).$$

   (b) Se $f(0)g(0)\neq 0$, então existe um intervalo $(-r;r)$, com $r>0$, tal que temos
   $$f(x)g(y)\neq 0,\ \text{para todo } (x,y)\in(-r,r)\times(-r,r).$$

4. Sejam $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $b:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $d:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ quatro funções contínuas, com
   $$\begin{vmatrix} a(0) & b(0)\\ c(0) & d(0)\end{vmatrix}\neq 0\,.$$
   Mostre que existe um intervalo aberto $(-r,r)$, com $r>0$, tal que temos
   $$\begin{vmatrix} a(w) & b(x)\\ c(y) & d(z)\end{vmatrix}\neq 0$$
   para toda quadrúpla $(w,x,y,z)\in(-r,r)\times(-r,r)\times(-r,r)\times(-r,r)$.

5. Consideremos $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ de classe $C^1$ e tal que $\det JF(0)\neq 0$. Escrevamos $F(x,y)=(F_1(x,y),F_2(x,y)$. Mostre que existe uma bola $B(0;r)\subset\mathbb{R}^2$, com $r>0$, tal que temos
   $$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(A) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(B)\\[2ex] \frac{\partial F_2}{\partial x}(C) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(D)\end{vmatrix}\neq 0\,,$$
   para toda quadrúpla $(A,B,C,D)\in B(0;r)\times B(0;r)\times B(0;r)\times B(0;r)$.

6*. Sejam a função $F$ e a bola $B(0;r)$ como no Exercício 5. Mostre que $F$, restrita à bola aberta $B(0;r)$, é uma função injetora. Isto é, mostre que se $P$ e $Q$ são pontos distintos da bola $B(0;r)$ então temos
   $$F(P)\neq F(Q).$$

   **Observação.** A notação usual para uma tal restrição é "$F\Big|_{B(0;r)}:B(0;r)\to\mathbb{R}^2$", ou simplesmente "$F\Big|_{B(0;r)}$". Felizmente não precisamos destas notações aqui.