Lista 2 de Exercícios - MAT236 - Funções Diferenciáveis e Séries - IME
1º semestre de 2022
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1. Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^2$, $g = g(u,v) : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em todo ponto de Ω e $F = F(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em todo ponto de $\mathbb{R}^3$. Suponhamos o gráfico de g contido numa superfície de nível de F.

   Mostre que se $P_0 \in \mathrm{Gr}(g)$ (o gráfico de g) e $\overrightarrow{\nabla} f(P_0) \neq \overrightarrow{0}$ então:

   $$\overrightarrow{\nabla} f(P_0) \text{ é ortogonal ao plano tangente ao gráfico de } g \text{ no ponto } P_0.$$

2. A função diferenciável $z = f(x,y)$ é dada implicitamente por $x^3 + y^3 + z^3 = 10$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,1,f(1,1))$.

3. a) Use a regra da cadeia para determinar $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$, onde $\begin{cases} z = z(x,y) = e^x \cos y \\ x = x(t,s) = ts \\ y = y(t,s) = \sqrt{t^2+s^2} \end{cases}$.

   b) Verifique, para o item a), a fórmula abaixo (uma Regra da Cadeia).

   $$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial t} & \dfrac{\partial z}{\partial s} \end{bmatrix}_{1\times 2} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix}_{1\times 2} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

4. (Coordenadas polares) Seja $z = f(x,y)$, onde $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$.

   (a) Determine $\frac{\partial z}{\partial r}$ e $\frac{\partial z}{\partial \theta}$.

   (b) Mostre que $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$.

   (c) Analogamente ao exercício imediatamente anterior, escreva para este exercício a fórmula matricial relacionando as derivadas.