QUÁDRICAS/CÔNICAS - Funções Diferenciáveis e Séries – MAT 236 – IME

Primeiro semestre de 2022

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

[Veja também `http://www.ime.usp.br/~oliveira/ele-conicas.pdf`]

No plano euclidiano consideremos dois pontos (focos) distintos F_1 e F_2.

ELIPSE

(1) Se $2a$ é um comprimento fixo e maior que a distância entre F_1 e F_2, o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é $2a$ é uma elipse.

A equação padrão da elipse é, em coordenadas cartesianas adequadas,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ onde } a > 0 \text{ e } b > 0.$$

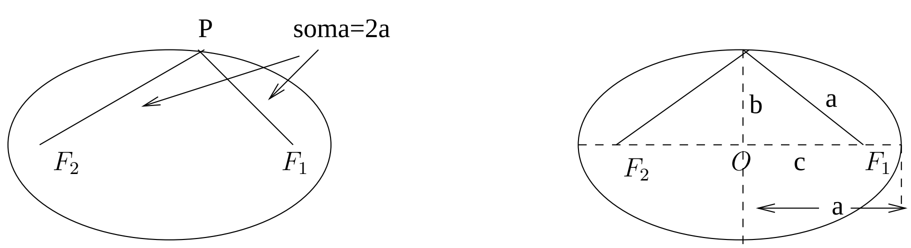

Figura 1: Desenho de uma elipse no plano euclidiano (à esquerda). Desenho de uma elipse no plano cartesiano (à direita).

Prova.

Seja s a reta pelos focos (desenhe) e O o ponto médio entre os focos.

Trace por O a reta t, perpendicular a s e mediatriz do segmento $\overline{F_1F_2}$.

Só há 2 pontos em t com soma das distâncias a F_1 e F_2 igual a $2a$ (ambos distam a de cada foco) e simétricos em relação à reta s (contém os focos).

Por semelhança de triângulos é fácil ver que se P é um ponto da elipse, então o ponto P', o simétrico de P em relação à reta s, também pertence à elipse. Logo, a elipse é simétrica em relação a s.

Para o mesmo P, temos que o ponto P'', simétrico de P em relação à reta t (perpendicular ao segmento $\overline{F_1F_2}$), também tem a propriedade: a soma de suas distâncias aos focos F_1 e F_2 é $2a$.

A figura tem eixos de simetria perpendiculares (t e s) e um centro natural. Para desenhá-la, escolhamos um sistema de coordenadas cartesianas Oxy tal que Ox, o eixo x, corresponda à reta t, Oy à reta s e adotemos O, o ponto médio entre os focos, como a origem. Assim $O = (0, 0)$.

Nesse sistema temos os seguintes elementos para uma elipse (vide figura):

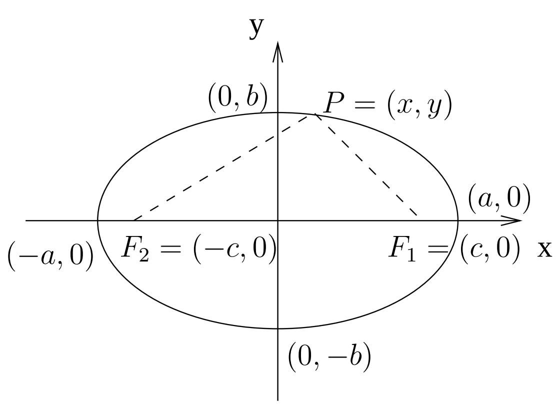

Figura 2: Focos, Vértices e Polos - Elipse

- Focos: $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$, com $c > 0$.
- Vértices: $A_1 = (-a, 0)$ e $A_2 = (a, 0)$.
- Polos: $B_1 = (0, -b)$ e $B_2 = (0, b)$, com $b > 0$.
- Eixo maior: $\overline{A_1A_2}$.
- Eixo-menor: $\overline{B_1B_2}$.
- Semi-eixo maior é o número a.
- Semi-eixo menor é o número b.
- Distância focal é o número $2c$.
- Semi-distância focal é o número c.
- Excentricidade é o número $e = \frac{c}{a} = \frac{\text{semi-distância focal}}{\text{semi-eixo maior}} < 1$.

É claro que temos os comprimentos $|\overline{B_2F_1}| = |\overline{B_2F_2}| = a$. Donde segue

$$(1) \qquad a^2 = b^2 + c^2.$$

A equação da elipse adquire então a forma:

$$(2) \qquad \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Isolando o segundo radical e efetuando o quadrado obtemos

$$(x+c)^2+y^2 = (2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2 = 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

e assim,

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4cx$$

e então chegamos às equações

$$(3) \quad |\overline{PF_1}| = \sqrt{(x-c)^2+y^2} = a - \frac{c}{a}x$$

e

$$(4) \quad |\overline{PF_2}| = \sqrt{(x+c)^2+y^2} = a + \frac{c}{a}x$$

onde (4) é obtida de (3), pois $|\overline{PF_2}| = 2a - |\overline{PF_1}|$.

O quadrado das equações (3) e (4) fornecem as equações

$$x^2 \ \mp 2cx \ + \ c^2 + y^2 = a^2 \ \mp 2cx \ + \ \frac{c^2}{a^2}x^2$$

e simplificando,

$$\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1.$$

Lembrando que $a^2 = b^2 + c^2$ obtemos, finalmente,

$$(5) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Mostramos que (2) implica (5).

Não é difícil verificar que (5) implica (2) e assim, adotamos (5) como forma reduzida (padrão) da equação da elipse.

HIPÉRBOLE

(2) O lugar geométrico dos pontos do plano cujo valor absoluto da diferença de suas distâncias aos focos F_1 e F_2 é constante e igual a $2a$, onde $a > 0$, é uma hipérbole.

A equação padrão da hipérbole é, em coordenadas cartesianas adequadas,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ , \quad a\,, b > 0 \ .$$

Observação 1.

Se um ponto P, no plano, forma um triângulo com os focos (isto é, P, F_1 e F_2 não colineares), pela desigualdade triangular temos $|\overline{PF_1}| < |\overline{PF_2}| + |\overline{F_1F_2}|$. Logo, $|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| < |\overline{F_1F_2}|$ e, analogamente, $|\overline{PF_2}| - |\overline{PF_1}| < |\overline{F_1F_2}|$. Assim,

$$|\ |\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}|\ | < |\overline{F_1F_2}|.$$

A condição de existência da hipérbole é então: $2a < |\overline{F_1F_2}|$.

Observação 2.

Para um ponto P na hipérbole temos

$$|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| = 2a \ \text{ ou } \ |\overline{PF_2}| - |\overline{PF_1}| = 2a.$$

Assim, a equação da hipérbole, não utilizando coordenadas, é,

$$(H) \qquad |\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| = \pm 2a \ .$$

O ramo direito (esquerdo) da hipérbole é obtido atribuindo o sinal $+$ $(-)$ na equação (H).

Prova.

Seja Oxy um sistema de cooordenadas cartesianas com o eixo x contendo o segmento $\overline{F_1F_2}$ e por eixo y a reta mediatriz deste segmento. Vide figura na próxima página.

Supondo $|\overline{F_1F_2}| = 2c$ ($0 < a < c$) temos : $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$, $c > 0$.

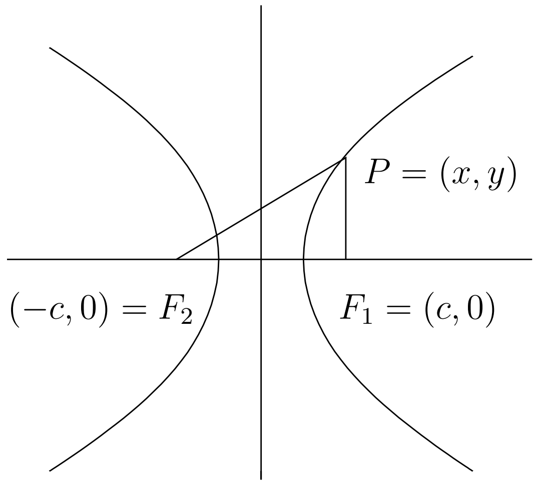

Figura 3: Hipérbole-Focos

Por (H), a equação da hipérbole em coordenadas cartesianas é,

$$(1) \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \ .$$

Passando o segundo radical para o segundo membro e então elevando ao quadrado obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 \ = \ [\, \pm 2a + |\overline{PF_1}|\,]^2 \ = \ 4a^2 \pm 4a|\overline{PF_1}| + (x-c)^2 + y^2 \ ,$$

donde

$$4cx \ = \ 4a^2 \pm 4a|\overline{PF_1}|$$

e então, as fórmulas dos raios focais são

$$(2) \quad |\overline{PF_1}| \ = \ \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm \left(\frac{c}{a}x - a \right)$$

e

$$(3) \quad |\overline{PF_2}| \ = \ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \ = \ \pm \left(\frac{c}{a}x + a \right) \ ,$$

onde (3) é obtida de (2), visto que $|\overline{PF_2}| = |\overline{PF_1}| \pm 2a$. Procurando manter uma notação salientamos que, assim como em (H), o sinal positivo corresponde ao ramo direito da hipérbole e o negativo ao ramo esquerdo.

Os quadrados destas equações (2) e (3) fornecem

$$x^2 \mp 2cx + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 \mp 2cx + a^2,$$

que reduzimos a

$$\left(\frac{c^2 - a^2}{a^2}\right) x^2 - y^2 = c^2 - a^2$$

ou

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Pela condição de existência, $0 < a < c$, temos $c^2 - a^2 > 0$ e escrevemos,

$$b^2 = c^2 - a^2 \ \text{ ou } c^2 = a^2 + b^2$$

[vide triângulo retângulo de catetos a e b e hipotenusa c na Figura 3 a seguir] e substituindo em (4) encontramos

$$(5) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Mostramos que (1) implica (5). Não é difícil verificar que (5) implica (1) e assim, adotamos (5) como forma padrão da equação de uma hipérbole.

Elementos de uma hipérbole.

- Focos: $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$, com $c > 0$.
- Centro: o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$.
- Vértices: $A_1 = (a, 0)$ e $A_2 = (-a, 0)$, com $a > 0$.
- Eixo real: o segmento $\overline{A_1A_2}$ e, também, o comprimento, $2a$, deste segmento.
- Semi-eixo real: o número a.
- Eixo principal: a reta contendo os focos e o eixo real.
- Eixo transverso ou imaginário ou conjugado: a reta mediatriz de eixo real.
- Distância focal: o número $2c = |\overline{F_1F_2}|$.
- Semi-distância focal: o número c.

- Semi-eixo transverso: o número $b > 0$ definido pela relação $b^2 = c^2 - a^2$.
- Assíntotas: as retas $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$.
- Excentricidade: é o número $e = \frac{c}{a} = \frac{\text{semi-distância focal}}{\text{semi-eixo real}} > 1$.

Note também o triângulo retângulo de vértices em $(0,0)$, $(a,0)$ e (a,b).

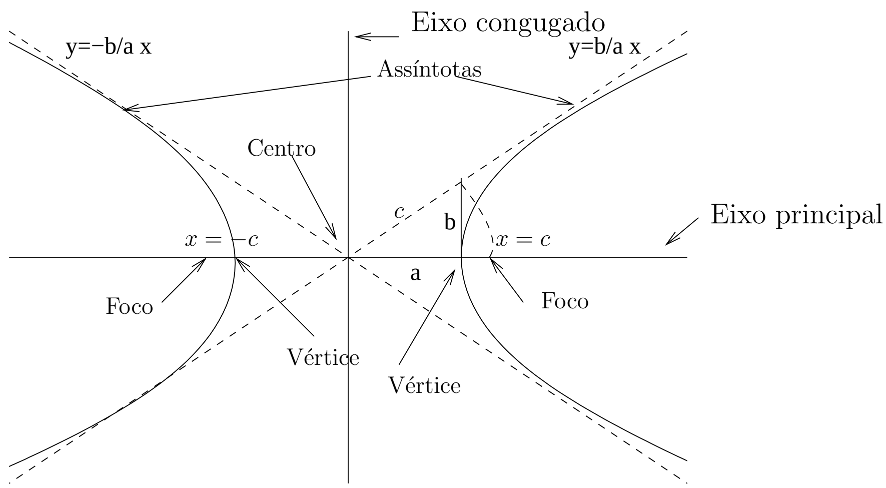

Figura 4: Elementos da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

A figura abaixo destaca o *retângulo fundamental para hipérboles*.

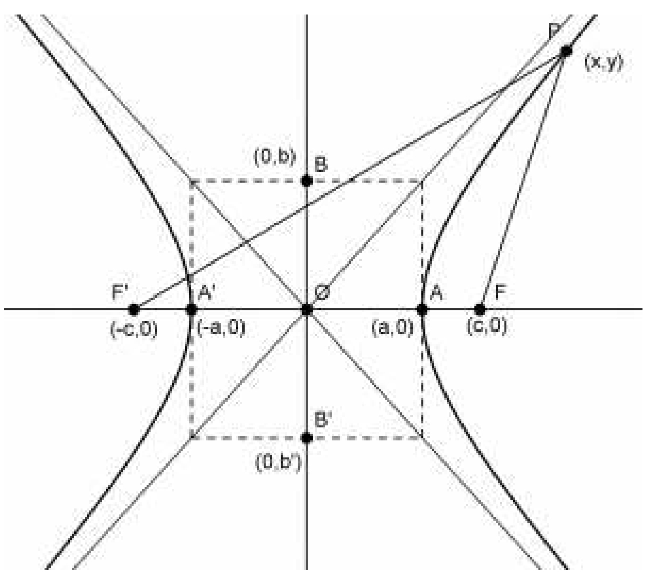

Figura 5: Retângulo fundamental e assíntotas da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Hipérbole X Circunferência

Consideremos a circunferência fundamental e a hipérbole fundamental, dadas respectivamente por

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad \text{e} \qquad x^2 - y^2 = 1.$$

Sabemos que podemos dar as coordenadas (polares) de um ponto $P = (x, y)$ da circunferência através das funções $\cos\theta$ e $sen\theta$, onde θ é o ângulo que o segmento $\overline{OP}$ forma com o eixo Ox.

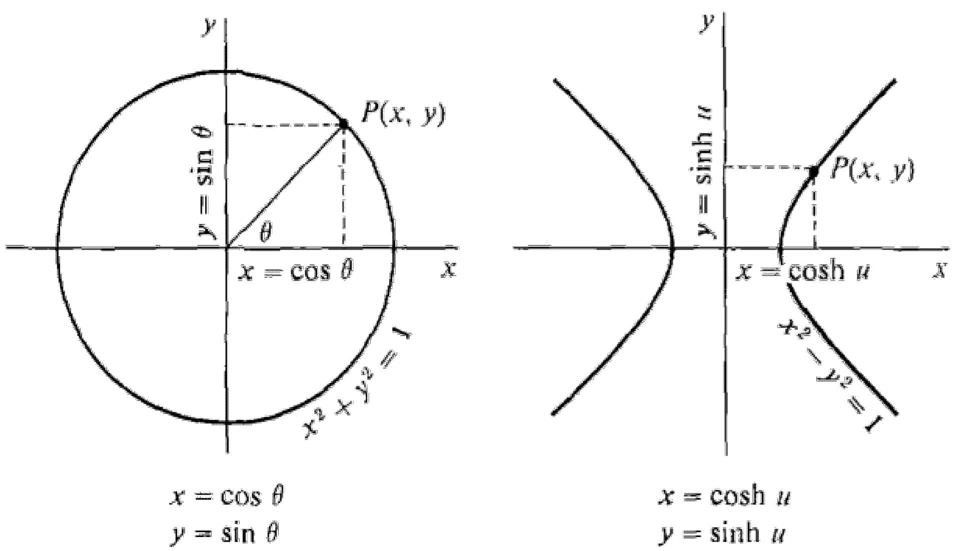

Figura 6: Coordenadas polares X Coordenadas hiperbólicas

Analogamente, consideremos um ponto $P = (x, y)$ no ramo direito da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$. Donde segue $x \geq 1$ e $y \in (-\infty, +\infty)$.

A função seno hiperbólico é uma bijeção de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e então existe um único número real u tal que

$$\sinh(u) = y.$$

Então, pela conhecida relação $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$, e sabendo que a função cosseno hiperbólico somene assume valores maiores ou iguais a 1, concluímos que

$$\cosh(u) = x.$$

Sabemos também que área do setor circular compreendido entre o eixo das abscissas e o segmento linear de extremidades $(0,0)$ e $(\cos x, senx)$ [tal setor é determinado pelo arco de circunferência unindo os pontos $(1,0)$ e $(\cos x, senx)$ e medindo x rad], é

$$\frac{x}{2}.$$

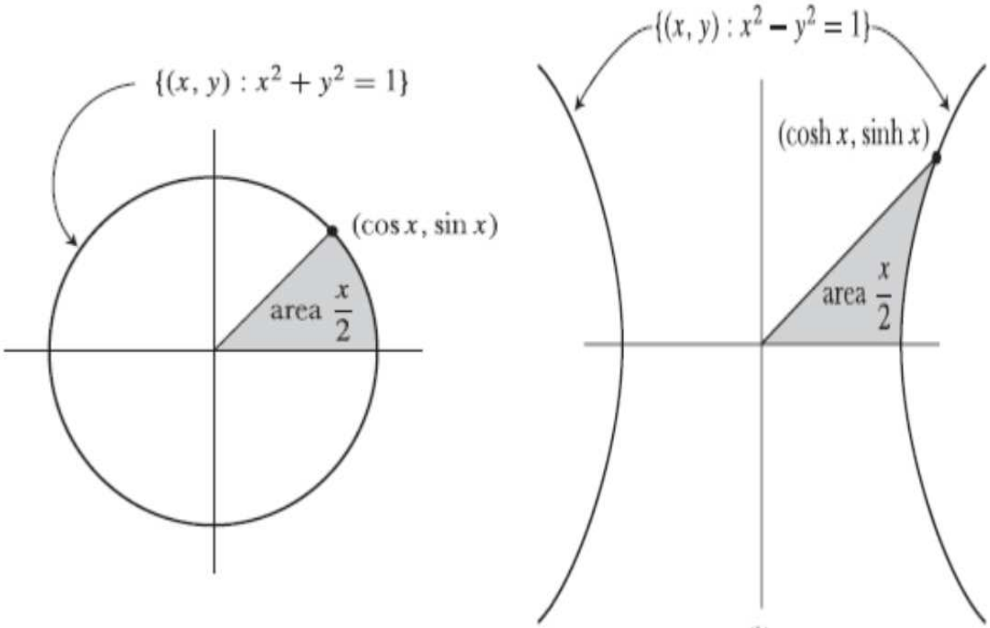

Figura 7: Área do setor circular X área do setor hiperbólico

Analogamente, pode ser mostrado (utilizando cálculo integral) que as hipérboles satisfazem a propriedade descrita a seguir.

A área do setor hiperbólico (vide figura acima) compreendido entre a curva hiperbólica, o eixo das abscissas e o segmento linear de extremidades $(0,0)$ e $(\cosh x, senh\, x)$ [tal setor é determinado pelo arco de hipérbole unindo os pontos $(1,0)$ e $(\cosh x, senh\, x)$], é

$$\frac{x}{2}.$$

PARÁBOLA

(3) Fixados no plano euclidiano, um ponto F (foco) e uma reta d (reta diretriz), com $F \notin d$, o lugar geométrico dos pontos tais que suas distâncias ao foco F e à reta diretriz d são iguais é uma parábola.

A equação padrão da parábola é, em coordenadas cartesianas,

$$x^2 = 4py, \text{ onde } p > 0.$$

Observação.

A parábola é simétrica em relação à reta pelo foco F e perpendicular à diretriz d. Esta reta pelo foco éo eixo de simetria da parábola. O ponto médio entre o foco F e a projeção de F sobre d (isto é, o ponto equidistante entre o foco e a reta diretriz) é o ponto da parábola mais próximo de d e é chamado vértice da parábola.

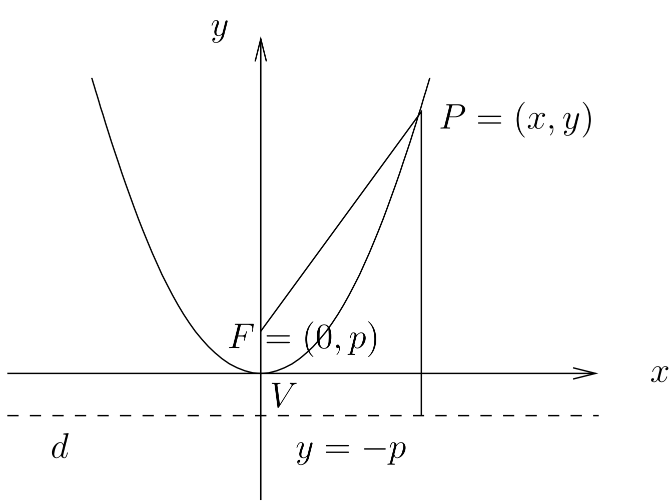

Figura 8: Parábola

Prova.

Seja Oxy um sistema cartesiano de coordenadas tal que:

(i) o eixo y corresponde ao eixo de simetria

(ii) a origem ao vértice,

(iii) o eixo x à reta pela origem, paralela a d e,

(iv) orientemos o eixo y tal que $F = (0, p), p > 0$.

Assim, a equação da reta diretriz d é dada por

$$y = -p.$$

Sendo $P = (x, y)$ um ponto arbitrário da parábola temos, pela definição,

$$(1) \quad \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = y + p$$

e elevando a equação acima ao quadrado e simplificando obtemos

$$(2) \quad x^2 = 4py \ .$$

Notemos que (1) e (2) são equivalentes.

Observação.

A constante $p > 0$ é a distância do vértice ao foco e, também, do vértice à diretriz.

Trocando-se a posição da parábola em relação aos eixos coordenados, sua equação muda.

Três outras posições simples, com as correspondentes equações são:

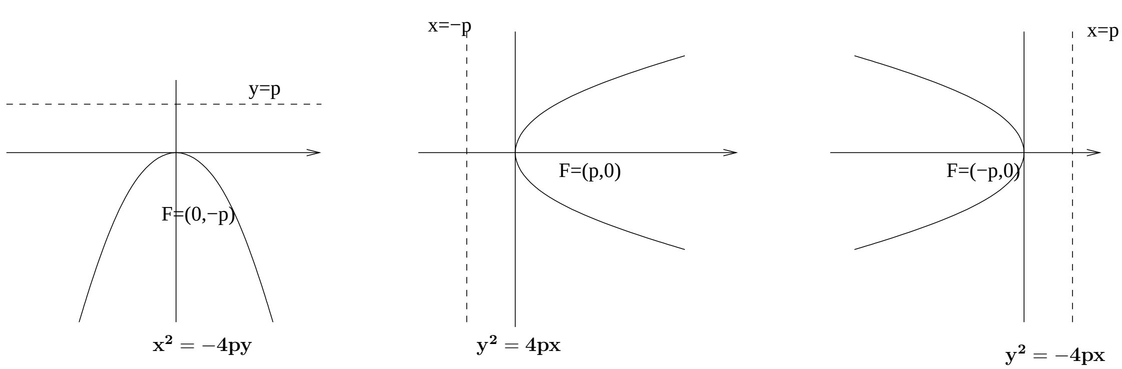

Figura 9: posições e equações - parábolas

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Departamento de Matemática, Universidade de São Paulo

oliveira@ime.usp.br