**$2^{\underline{a}}$ Prova de MAT226 - Equações Diferenciais Ordinárias I - IMEUSP**
**10 de novembro - segundo semestre de 2022**

| Q | N |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| Total | |

Nome : ______________**GABARITO**______________________
N$^{\underline{o}}$USP : ________________________________________________
Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

**Enunciе os teoremas utilizados.**
**Justifique suas afirmações.**
**BOA SORTE!**

1. Considere a edo escalar e homogênea

$$x^{(4)} - 7x''' + 18x'' - 20x' + 8x = 0, \text{ para } x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Encontre o que se pede.

(a) Um conjunto de soluções LI.

(b) A matriz companheira $A$.

(c) O respectivo conjunto LI de soluções do sistema linear

$$X' = AX, \text{ para } X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4.$$

(d) A respectiva matriz wronskiana de soluções $W(t)$ do sistema $X' = AX$.

**Solução.**

(a) O polinômio característico é

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 7\lambda^3 + 18\lambda^2 - 20\lambda + 8 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^3.$$

Um conjunto de soluções LI é

$$\left\{e^t,\ e^{2t}, te^{2t}, t^2e^{2t}\right\}.$$

(b) A matriz companheira é

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 20 & -18 & 7 \end{pmatrix}.$$

(c) Dada uma solução $x = x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da edo, então o caminho

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ x''(t) \\ x'''(t) \end{pmatrix}$$

é um caminho solução do sistema $X' = AX$, para $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$. Então encontramos os quatro caminhos

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \qquad X_2(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \\ 4e^{2t} \\ 8e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$X_3(t) = \begin{pmatrix} te^{2t} \\ (1+2t)e^{2t} \\ (4+4t)e^{2t} \\ (12+8t)e^{2t} \end{pmatrix}, \qquad X_4(t) = \begin{pmatrix} t^2e^{2t} \\ (2t+2t^2)e^{2t} \\ (2+8t+4t^2)e^{2t} \\ (12+24t+8t^2)e^{2t} \end{pmatrix}$$

.

(d) A matriz wronskiana é a matriz quadrada $W(t)$ em $M_4(\mathbb{R})$ cujas quatro colunas 1, 2, 3 e 4 são dadas, respectivamente, pelas coordenadas dos caminhos $X_1$, $X_2$, $X_3$ e $X_4$ apresentados no item (c).

Em notação sintética escrevemos

$$W(t) = [X_1(t), X_2(t), X_3(t), X_4(t)] \ \clubsuit$$

2. Seja $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e o produto cartesiano $[a,b]^n = [a,b] \times \cdots \times [a,b]$ ($n$-vezes). Seja $F = F(t,y) : [-1,1] \times [a,b]^n \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua com a matriz $\frac{\partial F}{\partial y}$ contínua. Consideremos uma sequência de funções contínuas $y_j : [-1,1] \longrightarrow [a,b]^n$ tal que

$$y_j \longrightarrow y \text{ uniformemente em } [-1,1].$$

(a) Prove que, para todo $s \in [-1,1]$ estão bem definidas as integrais

$$\varphi_j(s) = \int_0^s F(t, y_j(t))\, dt \quad \text{e} \quad \varphi(s) = \int_0^s F(t, y(t))\, dt$$

(b) Prove que $\varphi_j$ converge uniformemente a $\varphi$ ao longo de $[-1,1]$.

**Atenção.** Se preferir, pode assumir $n = 1$.

3. Resolva o sistema linear não homogêneo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix}.$$

**Notação.** A transposta de uma matriz $X$ é denotada $X^T$.
**Primeira Solução.** Método dos autovalores.

◇ Imponhamos uma condição inicial arbitrária $X(0) = x_0 = (a, b, c)^T \in \mathbb{R}^3$, supondo $X = (x, y, z)^T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Pela fórmula de Duhamel a solução do sistema linear não homogêneo considerado é

$$X(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}b(s)ds, \text{ onde } b(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ s \end{pmatrix}.$$

◇ O polinômio característico de $A$ é

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)^2 - (\lambda-1) + (\lambda-1)$$

$$= \lambda(\lambda-1)^2.$$

Logo, $\lambda = 0$ é raiz de multiplicidade 1 e $\lambda = 1$ é raiz de multiplicidade 2.

◇ Um autovetor $u$ associado a $\lambda = 0$ é dado por

$$\begin{cases} -y + z = 0 \\ -x - y = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow u = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

A autofunção associada ao autovetor $u$ é

$$x_1(t) = e^{0t}u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

◇ Um autovetor $v$ associado a $\lambda = 1$ é dado por

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x = 0 \\ -x = 0 \end{cases} \Rightarrow v = y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A autofunção associada ao autovetor $v$ é

$$x_2(t) = e^t v = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

$\diamond$ Um autovetor generalizado $w$ associado a $\lambda = 1$ é dado por

$$(I - A)^2 w = 0.$$

Logo,

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x = 1 \\ -x = 1 \end{cases} \Rightarrow w = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A autofunção generalizada associada ao autovetor generalizado $w$ é

$$\begin{aligned} x_3(t) &= e^t [I + t(A - I)] w \\ &= e^t \left[ I + t \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= e^t \begin{pmatrix} 1-t & t & -t \\ t & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= e^t \begin{pmatrix} -1 \\ -t \\ 1-t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\diamond$ Uma matriz fundamental de soluções é

$$W(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -e^t \\ -1 & e^t & -te^t \\ -1 & e^t & (1-t)e^t \end{pmatrix}.$$

$\diamond$ A matriz fundamental principal é

$$e^{tA} = W(t)W(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -e^t \\ -1 & e^t & -te^t \\ -1 & e^t & (1-t)e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & e^t - 1 & 1 - e^t \\ e^t - 1 & 1 + te^t & (1-t)e^t - 1 \\ e^t - 1 & (t-1)e^t + 1 & (2-t)e^t - 1 \end{pmatrix}.$$

$\diamond$ Pela fórmula de Duhamel temos

$$X(t) = e^{tA} \left[ x_0 + \int_0^t e^{-sA} b(s)\, ds \right].$$

Notemos que

$$e^{-sA} b(s) = \begin{pmatrix} 1 & e^{-s} - 1 & 1 - e^{-s} \\ e^{-s} - 1 & 1 - se^{-s} & (1+s)e^{-s} - 1 \\ e^{-s} - 1 & -(s+1)e^{-s} + 1 & (2+s)e^{-s} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ se^{-s} \\ se^{-s} \end{pmatrix}.$$

Donde segue

$$\int_0^t e^{-sA}b(s)\,ds = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \int_0^t se^{-s}ds \\ \\ \int_0^t se^{-s}ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ -(s+1)e^{-s}\Big|_0^t \\ \\ -(s+1)e^{-s}\Big|_0^t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1-(t+1)e^{-t} \\ \\ 1-(t+1)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Assim, retornando à fórmula de Duhamel encontramos

$$X(t) = e^{tA}\left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1-(t+1)e^{-t} \\ 1-(t+1)e^{-t} \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & e^t-1 & 1-e^t \\ e^t-1 & 1+te^t & (1-t)e^t-1 \\ e^t-1 & (t-1)e^t+1 & (2-t)e^t-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b+1-(t+1)e^{-t} \\ c+1-(t+1)e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$= e^{tA}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + e^{tA}\begin{pmatrix} 0 \\ 1-(t+1)e^{-t} \\ 1-(t+1)e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$= e^{tA}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + e^{tA}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + W(t)W(0)^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ -(t+1)e^{-t} \\ -(t+1)e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$= e^{tA}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix} + W(t)\begin{pmatrix} 0 \\ -(t+1)e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= e^{tA}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -t-1 \\ -t-1 \end{pmatrix}$$

$$= e^{tA}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t-t-1 \\ e^t-t-1 \end{pmatrix}$$

$$= e^{tA}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -t-1 \\ -t-1 \end{pmatrix} \clubsuit$$

**Vide próxima página.**

**Segunda Solução.**

$\diamond$ Pelo método das frações parciais temos

$$\frac{e^{tz}}{z(z-1)^2} = q(z) + \frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{z-1} + \frac{\gamma}{(z-1)^2},$$

com $q$ infinitamente derivável no plano complexo e constantes

$$\alpha = 1, \quad \beta = \frac{d}{dz}\left\{\frac{e^{tz}}{z}\right\}\Big|_{z=1} = \frac{te^{tz}z - e^{tz}}{z^2}\Big|_{z=1} = (t-1)e^t \quad \text{e} \quad \gamma = e^t.$$

Segue

$$e^{tA} = 1(A-I)^2 + (t-1)e^tA(A-I) + e^tA.$$

$\diamond$ Temos

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e também

$$A(A-I) = (A-I)A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\diamond$ Segue

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} + (t-1)e^t\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + e^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & e^t - 1 & 1 - e^t \\ e^t - 1 & 1 + te^t & (1-t)e^t - 1 \\ e^t - 1 & 1 + (t-1)e^t & (2-t)e^t - 1 \end{pmatrix}.$$

$\diamond$ Pela fórmula de Duhamel temos

$$X(t) = e^{tA}\left[x_0 + \int_0^t e^{-sA}b(s)\,ds\right].$$

Notemos que

$$e^{-sA}b(s) = \begin{pmatrix} 1 & e^{-s} - 1 & 1 - e^{-s} \\ e^{-s} - 1 & 1 - se^{-s} & (1+s)e^{-s} - 1 \\ e^{-s} - 1 & -(s+1)e^{-s} + 1 & (2+s)e^{-s} - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ s \\ s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ se^{-s} \\ se^{-s} \end{pmatrix}.$$

Donde segue

$$\int_0^t e^{-sA} b(s)\, ds = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \int_0^t se^{-s} ds \\ \\ \int_0^t se^{-s} ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ -(s+1)e^{-s}\Big|_0^t \\ \\ -(s+1)e^{-s}\Big|_0^t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1-(t+1)e^{-t} \\ \\ 1-(t+1)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Assim, retornando à fórmula de Duhamel encontramos

$$X(t) = e^{tA} \left[ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1-(t+1)e^{-t} \\ 1-(t+1)e^{-t} \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & e^t - 1 & 1 - e^t \\ e^t - 1 & 1 + te^t & (1-t)e^t - 1 \\ e^t - 1 & (t-1)e^t + 1 & (2-t)e^t - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b + 1 - (t+1)e^{-t} \\ c + 1 - (t+1)e^{-t} \end{pmatrix} \clubsuit$$

4. No espaço $M_2(\mathbb{R})$ sejam $I$ a matriz identidade e a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

com seu polinômio característico $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$.

(i) Ache a expressão polinomial para $p_A(\lambda)$ e mostre que

$$p_A(A) = 0.$$

(ii) Suponha que existem $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ambas em $C^\infty$, tais que

$$e^{tA} = f(t)I + g(t)A.$$

Suponha também que os auto-valores de $A$ são reais e distintos: $\lambda_1$ e $\lambda_2$ com respectivos auto-vetores associados $v_1$ e $v_2$. Encontre a fórmula para

$$e^{tA}.$$

**Solução.**

(ii) Temos $e^{tA}v_1 = e^{\lambda_1 t}v_1$ e analogamente $e^{tA}v_2 = e^{\lambda_2 t}v_2$.
Logo, computando $e^{tA} = f(t)I + g(t)A$ em $v_1$ e em $v_2$ obtemos

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t}v_1 = f(t)v_1 + g(t)\lambda_1 v_1 \\ \\ e^{\lambda_2 t}v_2 = f(t)v_2 + g(t)\lambda_2 v_2. \end{cases}$$

Donde cancelando os vetores não nulos $v_1$ e $v_2$ segue

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} = f(t) + g(t)\lambda_1 \\ \\ e^{\lambda_2 t} = f(t) + g(t)\lambda_2. \end{cases}$$

Portanto temos

$$\begin{cases} g(t) = \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ \\ f(t) = \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{cases} \clubsuit$$