Prova P1 de MAT226 - Equações Diferenciais Ordinárias I - IMEUSP
6 de outubro - segundo semestre de 2022

Q	N
1	
2	
3	
4	
Total	

Nome : ______________________________
N$^{\underline{\text{o}}}$USP : ______________________________
Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Justifique suas afirmações.
BOA SORTE!

1. Determine a solução geral (e real) $x = x(t)$ de

$$x^{(4)} - 5x''' + 13x'' - 19x' + 10x = t^2 e^t \cos 2t.$$

Solução.

◇ O polinômio característico é

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 13\lambda^2 - 19\lambda + 10 = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda^2 - 2\lambda + 5)$$
$$= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda - 1 - 2i)(\lambda - 1 + 2i).$$

◇ A solução da homogênea associada é

$$x_h = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^t \cos t + c_4 e^t \sin t.$$

◇ Temos $e^t \cos 2t = \mathrm{Re}[e^{(1+2i)t}]$. Procuremos uma solução particular complexa na forma $z(t) = Q(t)e^{\gamma t}$, onde $\gamma = 1 + 2i$. Então, Q deve satisfazer

$$\frac{p''''(\gamma)}{4!}Q'''' + \frac{p'''(\gamma)}{3!}Q''' + \frac{p''(\gamma)}{2!}Q'' + \frac{p'(\gamma)}{1!}Q' + \frac{p(\gamma)}{0!}Q = t^2.$$

Temos

$$\begin{cases} p(\gamma) = 0 \\ p'(\gamma) = 4\gamma^3 - 15\gamma^2 + 26\gamma - 19 \\ p''(\gamma) = 12\gamma^2 - 30\gamma + 26 \\ p'''(\gamma) = 24\gamma - 30 \\ p''''(\gamma) = 24 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \gamma = 1 + 2i \\ \gamma^2 = -3 + 4i \\ \gamma^3 = (1+2i)(-3+4i) = -11 - 2i. \end{cases}$$

Seguem

$$\begin{cases} p'(\gamma) = 8 - 16i \\ p''(\gamma) = -40 - 12i \\ p'''(\gamma) = -6 + 48i. \end{cases}$$

Então, Q deve satisfazer

$$Q'''' + (-1 + 8i)Q''' - (20 + 6i)Q'' + (8 - 16i)Q' = t^2.$$

Logo, Q' tem a forma

$$Q'(t) = \frac{t^2}{8 - 16i} + zt + w = \frac{t^2}{40}(1 + 2i) + zt + w, \text{ onde } z \in \mathbb{C} \text{ e } w \in \mathbb{C}.$$

◇ Substituindo esta última equação na penúltima (note que $Q'''' = 0$) obtemos

$$(-1+8i)\frac{2}{8-16i}-(20+6i)\left(\frac{2}{8-16i}t+z\right)+(8-16i)\left(\frac{t^2}{8-16i}+zt+w\right)=t^2.$$

Os termos em t^2 se cancelam. Identificando os termos em t obtemos

$$-\frac{(20+6i)2}{8-16i}+(8-16i)z=0.$$

Identificando os termos independentes obtemos

$$(-1+8i)\frac{2}{8-16i}-(20+6i)z+(8-16i)w=0.$$

◇ Cálculo de z. Temos

$$z=\frac{2(20+6i)}{(8-16i)^2}=\frac{10+3i}{(4-8i)^2}=\frac{10+3i}{-48-64i}=\frac{(10+3i)(-3+4i)}{(16)25}=\frac{-42+31i}{400}.$$

◇ Cálculo de w. Temos

$$(8-16i)w=(20+6i)z-(-1+8i)\frac{2}{8-16i}.$$

Logo,

$$(4-8i)w=(10+3i)z+(1-8i)\frac{1}{8-16i}.$$

Moultiplicando por $8-16i=8(1-2i)$ segue

$$4(1-2i)8(1-2i)w=(10+3i)8(1-2i)z+1-8i$$

$$=8(16-17i)z+1-8i$$

$$=8\frac{(16-17i)(-42+31i)}{400}+1-8i$$

$$=\frac{-145+1210i}{50}+1-8i$$

$$=\frac{-29+242i}{10}.$$

Logo,

$$32(-3-4i)w=\frac{-29+242i}{10}\quad\text{e então}$$

$$w=\frac{1}{320}\frac{(-29+242i)(-3+4i)}{25}=\frac{-881-842i}{8000}.$$

◇ Segue

$$Q'(t)=\frac{t^2}{8-16i}+\frac{(-42+31i)t}{400}+\frac{-881-842i}{8000}.$$

◇ Escolhamos

$$Q(t)=\frac{t^3}{24-48i}+\frac{(-42+31i)t^2}{800}-\frac{(881+842i)t}{8000}.$$

- $\diamond$ A solução complexa é

$$z(t) = \left[\frac{t^3}{24-48i} + \frac{(-42+31i)t^2}{800} - \frac{(881+842i)t}{8000}\right] e^t(\cos 2t + i\sin 2t).$$

- $\diamond$ A solução particular procurada

$$x_{part}(t) = \mathrm{Re}\left\{\left[\frac{t^3(1+2i)}{120} + \frac{(-42+31i)t^2}{800} - \frac{(881+842i)t}{8000}\right] e^t(\cos 2t + i\sin 2t)\right\}$$

$$= \left(\frac{t^3}{120} - \frac{42t^2}{800} - \frac{881t}{8000}\right) e^t \cos 2t - \left(\frac{2t^3}{120} + \frac{31t^2}{800} - \frac{842\,t}{8000}\right) e^t \sin 2t.$$

2. Resolva a equação de Bernoulli

$$2x^3\frac{dy}{dx} = y(y^2+3x^2).$$

Solução.

- ◇ A função nula $y=0$, em um intervalo qualquer, é uma solução.
- ◇ Suponhamos $y \neq 0$. Temos

$$2x^3\frac{y'}{y^3} = \frac{3x^2}{y^2} + 1.$$

Sejam

$$v = \frac{1}{y^2} \quad \text{e} \quad v' = -\frac{2y'}{y^3}.$$

Segue

$$-x^3v' = 3x^2v + 1.$$

Encontramos então

$$x^3v' + 3x^2v = -1.$$

Isto é,

$$(x^3v)' = -1.$$

Logo,

$$x^3v = -x + C \quad \text{e } v(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{C}{x^3}.$$

- ◇ Retornando a y encontramos

$$\frac{1}{y^2} = \frac{-x+C}{x^3}.$$

Logo,

$$y^2 = \frac{x^3}{C-x} \clubsuit$$

3. Encontre as soluções maximais da equação

$$(x+3y)-xy'=0.$$

Solução.

◇ Temos $xy'-3y=x$. Em cada semi-eixo $(-\infty,0)$ e $(0,+\infty)$ temos

$$\frac{1}{x^3}y'-\frac{3}{x^4}y=\frac{1}{x^3}.$$

Donde segue

$$\left(\frac{1}{x^3}y\right)'=\frac{1}{x^3}.$$

Obtemos então

$$\frac{1}{x^3}y=-\frac{1}{2x^2}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Asim, em cada semi-eixo aberto temos

$$y(x)=Cx^3-\frac{x}{2}.$$

Esta solução está definida em $x=0$ e $y(0)=0$. Na origem a derivada é $-1/2$, qualquer que seja C.

A solução geral é então

$$y(x)=\begin{cases} Ax^3-\frac{x}{2}, \text{ se } x\leq 0\\ \\ Bx^3-\frac{x}{2}, \text{ se } x\geq 0.\end{cases}$$

◇ Todas as soluções passam pela origem. Assim, não existe solução para uma condição inicial $(x_0,y_0)=(0,y_0)$ com $y_0\neq 0$.

Dada uma condição inicial (x_0,y_0) fora do eixo Oy (isto é, $x_0\neq 0$), temos infinitas soluções para a edo e cada solução está definida em toda a reta♣

4. Sejam $Q = [a-\delta, a+\delta] \times [b-\delta, b+\delta]$ um quadrado centrado em (a,b) e uma função $G : Q \to \mathbb{R}$, com $G = G(u,v)$. Mostre que é possível reduzir o PVI

$$(1) \qquad \begin{cases} v'(u) &= G(u, v(u)), \\ v(a) &= b. \end{cases}$$

a um PVI da forma

$$(2) \qquad \begin{cases} y'(x) &= F(x, y(x)), \\ y(0) &= 0, \end{cases}$$

onde $F = F(x,y)$ é uma função definida no quadrado $[-1,+1] \times [-1,+1]$.

Solução.

Seja $G : [a-\delta, a+\delta] \times [b-\delta, b+\delta]$, com $\delta > 0$, contínua e $\frac{\partial G}{\partial y}$ também contínua. Consideremos o problema com valor inicial

$$(4) \qquad \begin{cases} v'(u) = G(u, v(u)) \\ v(a) = b. \end{cases}$$

Definamos então a função

$$F(x,y) = G(a+\delta x, b+\delta y), \quad \text{com } (x,y) \in [-1,1] \times [-1,1],$$

e consideremos o problema com valor inicial

$$(5) \qquad \begin{cases} y'(x) = F(x, y(x)) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Mostremos que

$$v = v(u) \text{ é solução de (4) se e só se } y(x) = \frac{v(a+\delta x) - b}{\delta} \text{ é solução de (5).}$$

◇ Se $v(u)$ é solução de (4), então $y(0) = 0$ e

$$\begin{aligned} y'(x) = v'(a+\delta x) &= G(a+\delta x, v(a+\delta x)) \\ &= G(a+\delta x, b + v(a+\delta x) - b) \\ &= G(a+\delta x, b+\delta y(x)) \\ &= F(x, y(x)). \end{aligned}$$

◇ Se $y = y(x)$ é solução de (5), então

$$v(u) = \delta y\left(\frac{u-a}{\delta}\right) + b$$

satisfaz $v(a) = 0 + b = b$ e

$$\begin{aligned} v'(u) = y'\left(\frac{u-a}{\delta}\right) &= F\left(\frac{u-a}{\delta}, y\Big(\frac{u-a}{\delta}\Big)\right) \\ &= G\left(a + u - a, b + \delta y\Big(\frac{u-a}{\delta}\Big)\right) \\ &= G(u, v(u)) \clubsuit \end{aligned}$$