MAT 226 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS I
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Segundo semestre de 2017

LISTA 6 DE EXERCÍCIOS

Notações. Fixemos a base usual em $\mathbb{R}^n$. Seja I a identidade em $M_n(\mathbb{R})$. Abreviamos linearmente independente por LI e linearmente dependente por LD.

E1. **Resolvente.** Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$, consideremos o problema

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

(a) Mostre que a matriz fundamental principal de soluções é $e^{(t-t_0)A}$.

(b) Chamamos de resolvente para o problema dado acima a uma função $R : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ que satisfaz as condições

$$\begin{cases} R(t,t_0) \text{ é uma matriz fundamental de soluções, para cada } t_0 \text{ fixado,} \\ R(t_0,t_0) = I \text{ para todo } t_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Mostre que, no problema em questão, o resolvente é

$$R(t,t_0) = e^{(t-t_0)A}.$$

E2. **Resolvente (coeficientes não constantes).** Consideremos o problema

$$\begin{cases} x' = A(t)x, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{para } x : J \to \mathbb{R}^n,$$

onde J é um intervalo aberto e $A : J \to M_n(\mathbb{R})$ é contínua e satisfaz

$$A(s)A(t) = A(t)A(s), \text{ para quaisquer instantes } s \text{ e } t.$$

Mostre que a resolvente $R : J \times J \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ [ver definição acima] é

$$R(t,t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds\right).$$

Mostre que, fixado t_0, a função $R(\cdot,t_0) : J \to M_n(\mathbb{R})$ é a única solução de

$$\begin{cases} X' = A(t)X, \text{ para } X : J \to M_n(\mathbb{R}), \\ X(t_0) = I. \end{cases}$$

[Destaquemos que tal problema fornece uma caracterização do resolvente.]

Dica. Mostre primeiro que a matriz $\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds$ comuta com a matriz $A(t)$.

E3. **Resolvente e matriz fundamental.** Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e uma função $A : J \to M_n(\mathbb{R})$ contínua.

Denote por $R(t, t_0)$ a resolvente da equação

$$x' = A(t)x, \text{ para } x : J \to \mathbb{R}^n.$$

Isto é, para cada instante $t_0 \in J$, a função $t \mapsto R(t, t_0)$ é a única solução do problema matricial (com valor inicial)

$$\begin{cases} X' = A(t)X, \\ X(t_0) = I \end{cases} \quad \text{para } X : J \longrightarrow M_n(\mathbb{R}).$$

Dadas $x_1, \ldots, x_n$ soluções da equação homogênea $x' = A(t)x$, denote por

$$X = X(t) = [x_1, \ldots, x_n] \in M_n(\mathbb{R})$$

a função matricial cuja j-ésima coluna é a matriz das coordenadas de x_j.

Verifique o que segue.

(a) A identidade

$$X(t) = R(t, t_0)X(t_0).$$

(b) Temos $\det X(t) = 0$ em todo ponto ou $\det X(t) \neq 0$ em todo ponto.
O conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ é LD no primeiro caso e é LI no segundo.

(c) Se $\{x_1, \ldots, x_n\}$ é LI, diz-se que X é uma *matriz fundamental* para a equação homogênea considerada.
Se X for uma matriz fundamental e $C \in M_n(\mathbb{R})$ é inversível, então

$$X(t)C$$

é matriz fundamental. Ainda, toda matriz fundamental é dessa forma.

(d) Se $X : J \to M_n(\mathbb{R})$ é uma matriz fundamental, a resolvente é

$$R(t, t_0) = X(t)X(t_0)^{-1}.$$

E4. **Equação escalar, coeficientes não constantes e linear.** Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo e n funções contínuas $b, a_0, \ldots, a_{n-1} : J \to \mathbb{R}$. Estudemos a edo

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)x = b(t).$$

Definamos o sistema linear de primeira ordem

$$X' = A(t)X + B(t), \text{ para } X : I \to \mathbb{R}^n,$$

onde $A(t)$ [dita matriz companheira à edo escalar] e $B(t)$ são dados por

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \text{ e } B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Verifique as afirmações abaixo.

(i) A função real $x : J \to \mathbb{R}$ é solução da edo escalar se e só se o caminho

$$X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix} \text{ é solução do sistema } X' = A(t)X + B(t).$$

Ainda, toda solução do sistema $X' = A(t)X + B(t)$ é dessa forma.

(ii) Dado $t_0 \in J$, a resolvente do sistema homogêneo $X' = A(t)X$ é a matriz

$$R(t, t_0) = \big[R_1(t, t_0), \ldots, R_n(t, t_0)\big]$$

cuja j-ésima coluna é dada por

$$R_j(t, t_0) = \begin{pmatrix} r_j(t, t_0) \\ r_j'(t, t_0) \\ \vdots \\ r_j^{(n-1)}(t, t_0) \end{pmatrix},$$

com $r_j(t, t_0)$ a solução da edo homogênea (usemos o delta de Kronecker)

$$\begin{cases} x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)x = 0 \\ \text{com condição inicial } r_j^{(k)}(t_0, t_0) = \delta_{k,j-1}, \text{ para } 0 \le k \le n-1. \end{cases}$$

(iii) **Fórmula de Abel-Liouville e equações escalares.** Sejam $x_1, \dots, x_n$ soluções da edo escalar homogênea $x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x = 0$. Para cada $j = 1, \dots, n$ definamos a matriz $X(t) = [X_1, \dots, X_n]$ com

$$j\text{-ésima coluna } X_j = \begin{pmatrix} x_j \\ x_j' \\ \vdots \\ x_j^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Temos $X(t) = R(t, t_0)X(t_0)$, para todos $t \in J$ e $t_0 \in J$.

O também chamado **determinante wronskiano**

$$W = W[x_1, \dots, x_n] = \det \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x_1' & \cdots & x_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad [\text{note-se } W = \det X]$$

é dado pela fórmula de Abel-Liouville

$$W(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_{n-1}(s)\, ds \right) W(t_0).$$

O determinante W é a função nula (caso em que $y_1, \dots, y_n$ são LD) ou não se anula em ponto algum (caso em que $y_1, \dots, y_n$ são LI).

(iv) **Resolvente e variação das constantes.** Com a notação do itens anteriores, use a fórmula da variação das constantes para concluir que a solução da equação escalar não homogênea

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x = b(t)$$

com condição inicial $\left(x(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)\right) = (0, \dots, 0)$ é dada por

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} r_n(t, s)b(s)\, ds.$$

Conclua a partir da questão anterior que, se $n = 2$ e x_1, x_2 forem duas soluções linearmente independentes da homogênea

$$x'' + a_1'(t)x' + a_0(t)x = 0,$$

então

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} b(s) \frac{x_2(t)x_1(s) - x_1(t)x_2(s)}{W(x_1, x_2)(s)}\, ds.$$

Atenção. *Dadas quaisquer n funções escalares $y_1 : J \to \mathbb{R}, \ldots, y_n : J \to \mathbb{R}$ em $C^{(n-1)}$, com $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo, é também dito* **wronskiano** *o determinante*

$$W[y_1, \ldots, y_n] = \det \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

1. Se $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e limitada, então toda solução da edo

$$y'' + 5y' + 4y = f$$

é limitada. Dica. Dê a solução geral, via fórmula da variação das constantes.

2. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que todos os autovalores de A estejam no semiplano $\mathrm{Re}(z) < 0$. Suponha que $f : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ seja contínua e limitada. Mostre todas as soluções de $x' = Ax' + f(t)$ são limitadas.

3. Resolva, explicitando o domínio da solução maximal, o problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + y = \sec x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

4. Seja $L : \{y \in C^2([0, 2\pi]) \text{ tal que } y'(0) = y'(2\pi) = 0\} \longrightarrow C^0([0, 2\pi])$ o operador linear definido por

$$L(y) = y'' + y.$$

   (a) Mostre que o núcleo de L é gerado por $\cos x$.

   (b) Mostre que $f \in C^0([0, 2\pi])$ pertence à imagem de L se e somente se

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos t \, dt = 0.$$

5. Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo com $0 \in J$ e $f : J \to \mathbb{R}$ contínua.

   (a) Aplique o método da variação dos parâmetros à equação $x'' - x = f(t)$, partindo-se das soluções $\phi_1(t) = \cosh t$ e $\phi_2(t) = \sinh t$ da equação homogênea associada. Conclua que a solução geral da referida equação pode ser descrita por

   $$c_1 \cosh t + c_2 \sinh t + \int_0^t \sinh(t-s) f(s)\, ds,$$

   com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

   (b) Mostre que está bem definido e é inversível o operador linear

   $$L : \{x \in C^2([0,1]) \text{ tal que } x(0) = x(1), x'(0) = x'(1)\} \longrightarrow C^0([0,1])$$

   definido por $L(y) = y'' - y$.

6. Para cada uma das equações abaixo, é dada uma solução ϕ_1. Encontre uma solução ϕ_2, linearmente independente de ϕ_1, no intervalo indicado.
   Dica. Use a fórmula de Abel-Liouville

   (a) $x'' - 4tx' + (4t^2 - 2)x = 0$, $\phi_1(t) = e^{t^2}$, na reta $\mathbb{R}$.

   (b) $(1 - t^2)x'' - 2tx' + 2x = 0$, $\phi_1(t) = t$, no intervalo $(0,1)$.

   (c) $tx'' - (t+1)x' + x = 0$, $\phi_1(t) = e^t$, no semieixo $(0, +\infty)$.

7. **Método de Putzer**. Expresse e^{tA} como um polinômio em A.

   $(a)\ A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $(b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

   $(c)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $(d)\ A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

   $(e)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $(f)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

8. Ache e^{tA} (em forma fechada) para cada uma das matrizes no exercício 7.

9. Para cada item no exercício 7, resolva o respectivo sistema $X' = AX$ com a condição inicial dada abaixo.

$$(a)\quad X(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \qquad (b)\quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(c)\quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (d)\quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$(e)\quad X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (f)\quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

10. Resolva o sistema linear $X' = AX + B(t)$ com a condição inicial dada.

$$(a)\quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2e^t \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(b)\quad A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} e \\ e^{2t} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

$$(c)\quad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

11. Encontre e^{tA} para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Resolva $x' = Ax$, com $x(0) = (1, 2, 3, 4)^T$ [matriz transposta de $(1, 2, 3, 4)$].

12. Seja $A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ de classe C^∞. Verifique as afirmações.

   (a) Existe um $c > 0$ tal que temos $|A(h) - A(0)| \leq c|h|$ para todo $|h| \leq 1$.
   Dica. TFC ou o TVM, em cada coordenada (total n^2).

   (b) $\boxed{A(0) = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dt} e^{A(t)} = A'(0)}$.
   Dicas. Escreva o somatório para $e^{A(t)}$ e então compute a derivada.

13. Sejam A e B matrizes em $M_n(\mathbb{R})$ e t a variável real. Mostre que

$$e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB} \text{ (para todo t) } \Longrightarrow AB = BA.$$

   Dica. Derive.

14. Seja $A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ de classe C^∞ e satisfazendo a identidade

$$A(t)A(s) = A(s)A(t) \text{ para quaisquer } t \text{ e } s.$$

   Mostre

$$\frac{d}{dt} e^{A(t)} = A'(t) e^{A(t)} = e^{A(t)} A'(t).$$

   Dicas (escolha uma).

   (1) Verifique que a identidade $A(t)A(s) = A(s)A(t)$ garante a fórmula

$$\frac{d}{dt} e^{A(t)} = \frac{d}{ds} \left\{ e^{A(s)-A(t)} e^{A(t)} \right\} \Big|_{s=t}.$$

   Então, aplique 12 (b).

   (2) Escreva o somatório para e^{tA}. Aplique 12(a) e estime

$$\frac{e^{A(t+h)} - e^{A(t)}}{h} - A'(t) e^{A(t)}.$$