MAT 226 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS I

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Segundo semestre de 2017

LISTA 5 DE EXERCÍCIOS

Notações. Abreviamos linearmente independente por LI.

Fixemos a base canônica $e_1, \ldots, e_n$ de $\mathbb{R}^n$, para cada $n = 1, 2, \ldots$.

Denotamos I, a matriz identidade em $I \in M_n(\mathbb{R})$.

E1. Sejam A, B e C matrizes em $M_n(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$. Mostre as afirmações abaixo.

(a) Se $AC = CB$, então
$$e^{tA}C = Ce^{tB}.$$

(b) $AB = BA$, então
$$e^{tA}B = Be^{tA} \quad \text{e} \quad e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB} = e^{tB}e^{tA}.$$

E2. Seja $I \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz identidade. Sejam
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Compute as potências de A, as potências de B e as matrizes e^{tA} e e^{tB}. Mostre que A não comuta com B e que e^{tA} não comuta com e^{tB}.

(b) Escreva $C = I + B$. Utilize que $IB = BI$, o Exercício 1 e compute e^{tC}.

E3. Seja a matriz (correspondente à reflexão em relação à bissetriz principal)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Ache os dois auto-valores reais e correspondentes auto-vetores (reais).

(b) Ache dois caminhos-soluções LI para $x' = Ax$.

(c) Seja $X(t)$ a matriz fundamental relativa às soluções em (b). Ache e^{At}.

(d) Compute e^{tA} diretamente (i.e., pela definição).

E4. Encontre o que se pede abaixo, para a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Auto-valores (complexos) e respectivos auto-vetores (complexos).

(b) Dois caminhos-soluções complexos e LI para $z' = Az$, onde $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2$.

(c) Dois caminhos-soluções reais e LI para $x' = Ax$.

(d) Ache e^{At}. Use $X(t)$, matriz fundamental com as soluções reais em (c).

E5. Sejam $A \in M_n(\mathbb{R})$, a identidade $I \in M_n(\mathbb{R})$ e λ um auto-valor de A. Seja $v \neq 0$ um **auto-vetor generalizado** associado a λ. Isto é, existe m tal que

$$(A - \lambda I)^m v = 0.$$

Mantidas as notações acima, verifique o que segue.

$$(a) \qquad e^{t(A-\lambda I)}v \;=\; \sum_{k<m} \frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k v \;=\; v + t(A-\lambda I)v + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(A-\lambda I)^{m-1}v.$$

$$(b) \qquad e^{tA}v = e^{\lambda t}\sum_{k<m}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k v.$$

$$(c) \qquad \left[e^{tA}v\right]' = A\left[e^{tA}v\right].$$

E6. Encontre o que se pede para a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Auto-valores reais (um simples e um duplo) e dois auto-vetores LI.

(b) Dois auto-vetores generalizados LI, relativos ao auto-valor duplo.

(c) Três caminhos-soluções reais e LI para $x' = Ax$.

(d) Ache e^{At}. Use $X(t)$, matriz fundamental com as soluções reais em (c).

E7. Encontre o que se pede abaixo, para a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) O único auto-valor real ν (tripla multiplicidade) e auto-vetores LI.

(b) Três auto-vetores generalizados LI.

(c) Três caminhos-soluções reais e LI para $x' = Ax$.

(d) Ache e^{At}. Use $X(t)$, matriz fundamental com as soluções reais em (c).

(e) Mostre que $(A - \nu I)^3 = 0$. Isto é, $N = A - \nu I$ é **nilpotente**.

(f) Utilize (e) e compute e^{At} diretamente.

1. Representemos $\mathbb{R}^3$ com coordenadas x,y e z.

   (a) Resolva o sistema linear homogêneo com coeficientes constantes

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = 6x - 11y + 6z \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

   (b) Compute e^{At}, onde A é a matriz 3×3 neste enunciado.

2. Representemos $\mathbb{R}^2$ com coordenadas x e y.

   (a) Resolva o sistema linear homogêneo com coeficientes constantes

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - 2y \end{cases}$$

   (b) Compute e^{At}, onde $A \in M_2(\mathbb{R})$ é a matriz associada a tal sistema.

3. Resolva o problema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y + 2z \\ \frac{dy}{dt} = -y \\ \frac{dz}{dt} = -y - 2z \end{cases} \qquad \text{com} \qquad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4. Resolva o sistema

$$\begin{cases} x' = 2x - 5y \\ y' = 2x - 4y \end{cases}$$

5. Seja $X = (x, y, z)^T$ a variável em $\mathbb{R}^3$.

   (a) Resolva o sistema linear com condição inicial

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X \qquad \text{com} \qquad X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (b) Compute e^{At}, com $A \in M_{3\times 3}$ a matriz associada ao sistema.

6. Resolva o sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

7. Calcule e^{At}, nos seguintes casos:

a) $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ f) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

8. Em cada um dos ítens abaixo, resolva o problema de valor inicial dado

a) $x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 10 & 2 \end{pmatrix} x,\ x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 13 \end{pmatrix}$ b) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} x,\ x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} x,\ x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ d) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 10 & 9 & 1 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix} x,\ x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

9. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Mostre que $A(A-5I) = 0$.

(b) Determine e^{At}.

10. Resolva os sistemas lineares homogêneos com coeficientes constantes abaixo.

a) $\begin{cases} x' = -y \\ y' = -4x \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = -3x + y \\ y' = 8x - y \end{cases}$ c) $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + z \\ z' = x + y \end{cases}$

d) $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 3x - 2y \end{cases}$ e) $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = y - z \\ z' = z - x \end{cases}$ f) $\begin{cases} x' = x + 2y - z \\ y' = -y + 3z \\ z' = 2z \end{cases}$

g) $\begin{cases} x' = ax - y \\ y' = x + ay \end{cases}$ h) $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -2x + 5y \end{cases}$ i) $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = 3x + 2y + z \end{cases}$

11. Seja $X = (x, y)^T$ a variável em $\mathbb{R}^2$. Resolva o sistema linear não homogêneo

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}.$$

12. Resolva o sistema linear não homogêneo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix}.$$

13. Resolva os sistemas lineares não homogêneos

a) $\begin{cases} 4x' - y' + 3x = \sin t \\ x' + y = \cos t \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = x - 2y + t^2 + 2t \\ y' = 5x - y \ - 4t^2 + 2t \end{cases}$

c) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ -2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{cases} x' = y \\ y' = 3x - 2y + 3t^2 - 4t + 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x' + y = \cos t \\ y' + x = \sin t \end{cases}$

f) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -2x + 3y + 3e^t \\ \end{cases}$

g) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

h) $\begin{cases} x' = 3x + 3y + e^{-t} \\ y' = -x - y + e^{2t} \end{cases}$

i) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ -2 \end{pmatrix}$

j) $\begin{cases} x' + y' = -x + y + 3 \\ x' - y' = x + y - 3 \end{cases}$

14. Seja $X : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ derivável e inversível para todo $t \in \mathbb{R}$. Compute

$$[X^{-1}]'(t) = \frac{d}{dt}\left\{X(t)^{-1}\right\}.$$

15. Considere a equação $x' = A(t)x$, para $x : I \to \mathbb{R}^n$, onde I é um intervalo aberto e $A : I \to M_n(\mathbb{R})$ é contínua. Deduza a fórmula para a variação dos parâmetros, procurando por uma solução do problema

$$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

na forma $x(t) = X(t)C(t)$, com $X(t)$ uma matriz fundamental e $C : I \to \mathbb{R}^n$.

16. Seja $\Phi : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ de classe C^1. Suponha $\Phi(0) = I$ (identidade) e $\Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s)$ para quaisquer t e s. Prove que existe uma só matriz A tal que

$$\Phi(t) = e^{At}.$$

17. Seja $A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ contínua e tal que

$$\left[\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right] A(t) = A(t)\left[\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right].$$

Prove que então

$$\Phi(t) = e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds} \text{ é solução fundamental de } x' = A(t)x.$$

Dica. Mostre que

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right]^m = mA(t)\left[\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds\right]^{m-1}, \text{ onde } m = 1, 2, \ldots.$$

18. Sejam A e B matrizes em $M_n(\mathbb{R})$ [ou $M_n(\mathbb{C})$]. O **colchete** entre A e B é

$$[A, B] = BA - AB.$$

Suponhamos $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$. Mostre que então temos

$$e^{tB}e^{tA} = e^{t(A+B)}e^{\frac{t^2}{2}[A,B]} \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Dica. Verifique que

$$\Phi(t) = e^{-t(A+B)}e^{tB}e^{tA}$$

é solução de $X' = t[A, B]X$.

19. Seja $F : \Omega \to \mathbb{R}$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto arbitrário, com $F = F(x, y)$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ contínuas. Seja K compacto em Ω. Mostre que existe uma constante $M > 0$ tal que temos

$$|F(t, x) - F(t, y)| \leq M|x - y|$$

quaisquer que sejam os pares (t, x) e (t, y), com mesma abscissa, em K.