

MAT 226 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS I
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Segundo semestre de 2017

LISTA 4 DE EXERCÍCIOS

1. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo não-degenerado, uma função $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e $F : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(t, x) = g(t)|x|$. Mostre que para todo ponto $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$ existe uma única solução $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ do problema de Cauchy

$$x' = F(t, x) \text{ com } x(t_0) = x_0.$$

2. Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x, y) = 2\sqrt{|y|}$.

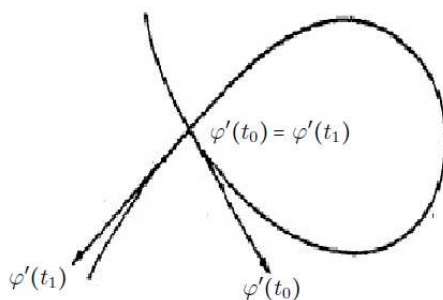
(1) Encontre o conjunto das soluções maximais da equação $y' = F(x, y)$.

(2) Para a equação em (1), vale a propriedade da unicidade de soluções? Caso a sua resposta seja negativa, isto contraria o teorema de Picard?

3. Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e suponha que $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja solução de

$$\begin{cases} x' = F(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1)$$

É possível que existam $t \neq T$ satisfazendo: $\phi(t) = \phi(T)$ e $\{\phi'(t), \phi'(T)\}$ LI? Em caso afirmativo, isto contraria a unicidade de soluções dada pelo TEU?



Dica. Note que $\frac{d}{dt}(t \sin t) = t \cos t + \sin t$ e $\frac{d}{dt}(t^2 \sin t) = t^2 \cos t + 2t \sin t$. Seja $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ solução de (1) passando por $(0, 0)$. Avalie ϕ e ϕ' , em π e 2π .

4. Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e suponha que $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja solução de

$$\begin{cases} x' = F(x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

É possível que existam $t \neq T$ tais que (i) $\phi(t) = \phi(T)$ e (ii) $\phi'(t) \neq \phi'(T)$? Compare com a questão anterior.

5. Sejam $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, com F de Lipschitz. Mostre que vale a propriedade da unicidade de soluções para o problema

$$\begin{cases} x' = F(x), \\ y' = G(x)y, \\ (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0). \end{cases}$$

6. Sejam um aberto $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e uma função $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua e localmente Lipschitz na segunda variável. Seja $\phi : (\omega_-, \omega_+) \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma solução maximal de $x' = F(t, x)$. Mostre as afirmações abaixo.

(1) Não é verdade, em geral, que existam

$$\lim_{t \rightarrow \omega_+} \phi(t) \quad \text{ou} \quad \lim_{t \rightarrow \omega_-} \phi(t),$$

mesmo que ω_{\pm} sejam finitos. Apresente um exemplo.

Dica: $\frac{d}{dt}(\sin 1/t) = -\frac{\cos 1/t}{t^2}$.

(2) Se F é limitada e $\omega_+ \in \mathbb{R}$, mostre que

$$\text{existe } x_+ = \lim_{t \rightarrow \omega_+} \phi(t) \quad \text{e} \quad (\omega_+, x_+) \in \partial\Omega.$$

Analogamente para ω_- , se $\omega_- \in \mathbb{R}$.

7. Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua e localmente Lipschitz na segunda variável. Suponha F limitada. Então, toda solução maximal de $x' = F(t, x)$ é global.

Dica. Questão anterior.

8. Sejam um campo vetorial $X = (X_1, \dots, X_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável satisfazendo

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) X_i(x) \leq 0 \quad \text{e} \quad V(x) \geq |x|^2, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Mostre que toda solução maximal $x : (\omega_-, \omega_+) \rightarrow \mathbb{R}^n$, de $x' = X(x)$, é global.

9. (*Resultado utilizado na prova da Dependência Contínua, Seção 1.2.*)

Seja $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto, com $F = F(x, y)$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ contínuas. Seja K compacto em Ω . Mostre que existe uma constante M satisfazendo

$$|F(t, x) - F(t, y)| \leq M|x - y|, \quad \text{se } (t, x) \in K \text{ e também } (t, y) \in K.$$

[A constante independe dos pares.] Dica. Argumente por contradição.

10. **Desigualdade de Gronwall.** Seja $\delta : [0, T] \rightarrow [0, +\infty)$ contínua. Suponha que existam constantes $C \geq 0$ e $K \geq 0$ tais que

$$\delta(t) \leq C + \int_0^t K\delta(s) ds, \quad \text{para todo } t \in [0, T].$$

Mostre a desigualdade

$$\delta(t) \leq Ce^{Kt}.$$

11. **EDO linear de ordem n e escalar X Sistema linear de ordem 1.**

Sejam b, a_0, \dots, a_{n-1} funções reais e contínuas definidas no intervalo aberto I . Considere a EDO linear de ordem n (coeficientes não constantes)

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x = b(t) \quad (2)$$

e a EDO linear de ordem 1 (um sistema)

$$X' = A(t) \cdot X + B(t) \quad (3)$$

onde:

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \dots & -a_{n-1}(t) & \dots \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

Mostre que $x = x(t)$ é solução da edo escalar se e só se $X = (x, x', \dots, x^{(n-1)})$ é solução do sistema. Ainda, toda solução do sistema é dessa forma.

12. (Vide Lista 2 de exercícios.) Escreva cada uma das equações diferenciais lineares (escalares) com coeficientes constantes abaixo na forma de um sistema linear com coeficientes constantes no formato

$$X' = AX + B.$$

- (a) $P(D)x = x'' - 4x' + 13x = te^{2t} \sin 3t.$
- (b) $P(D)x = x'' + 2x' + 2x = e^{\alpha t} \sin \beta t,$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}.$
- (c) $P(D)x = x''' - 5x'' + 3x' + 9x = t^4 e^{3t}.$
- (d) $P(D)x = x''' - x' = 3e^{2t}.$
- (e) $P(D)x = x^{(4)} - 7x''' + 18x'' - 20x' + 8x = t^3 e^{2t}.$
- (f) $P(D)x = x^{(4)} + 8x'' + 16x = t^3 \sin 2t.$
- (g) $P(D)x = x^{(5)} + 2x''' + x' = 0.$

13. Para cada uma das edo's (escalares) na questão anterior considere a respectiva edo (escalar) homogênea. Encontre então o que é pedido abaixo.

- (1) Um conjunto LI de soluções (da homogênea). Vide Lista 2 de exercícios.
- (2) A respectiva matriz companheira $A.$
- (3) A cada conjunto LI e ordenado de soluções no item (1) encontre o respectivo conjunto LI e ordenado de soluções do respectivo sistema linear homogêneo

$$X' = AX.$$

- (4) A cada conjunto LI de soluções solicitado em (3) escreva a respectiva matriz de soluções $M = M(t)$ para o respectivo sistema linear

$$X' = AX.$$