

MAT 226 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS I

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Segundo semestre de 2017

LISTA 3 DE EXERCÍCIOS

Notação: PVI indica Problema com Valor inicial, também dito Problema de Cauchy.

1. EDOL de primeira ordem, com coeficientes não constantes e não homogênea. Resolva os PVI's abaixo e, se possível, ache a solução maximal.

(a) $xy' + 2y = \operatorname{sen} x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

(b) $y' + \frac{1}{x}y = 3 \cos 2x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

(c) $y' - 2xy = x$, $y(0) = 1$.

2. Equação de Bernoulli $y' + p(x)y = q(x)y^n$. Prove (*) e resolva demais itens.

(*) Reduza a edo de Bernoulli a uma linear com a mudança $z = y^{1-n}$.

(a) $\frac{dy}{dx} = 5y - \frac{4x}{y}$

(b) $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} - \sqrt{x}$, $t > 0$

(c) $v \frac{dv}{dx} = v^2 - e^{2x}v^3$

(d) $y' = ay - by^3$

(e) $y(6y^2 - x - 1) + 2x \frac{dy}{dx} = 0$

(f) $2x^3 \frac{dy}{dx} = y(y^2 + 3x^2)$

3. Equação de Bernoulli. Ache as soluções maximais.

(a) $\frac{dy}{dx} + y = xy^3$

(b) $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = y^{\frac{1}{2}}$.

4. Variáveis Separáveis. Resolva.

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{x}$, $x > 0$

b) $\frac{dv}{dt} = 4 - v^2$

c) $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2+1}{t^2+1}$, $x(0) = 0$

d) $\frac{dv}{dt} = 1 - t + y^2 - ty^2$

5. Variáveis separáveis. (a) Resolva $\frac{dx}{dt} = x^2t$ e esboce o gráfico das soluções.

(b) Determine e esboce as soluções com condição inicial:

i) $x(1) = 0$

ii) $x(0) = 1$

iii) $x(0) = -1$

6. Equações Escalares Autônomas. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo não-degenerado e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua com $f(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Considere a equação

$$\dot{x} = f(x) \quad [\text{onde } x = x(t)].$$

- (a) Encontre uma fórmula para as soluções (maximais) $x = x(t)$.
 (b) Se $I = \mathbb{R}$ e f é limitada, toda solução maximal é global (domínio \mathbb{R}).
 (c) Para cada $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times I$, demonstre a existência e unicidade de soluções para o problema de Cauchy com condição inicial (t_0, x_0) .

7. Encontre as soluções maximais das equações abaixo.

- (a) $y' = 1 + y^2$ (autônoma) (b) $y' - 2xy = x$ (ordem 1)
 (c) $y' = (1 + x)(1 + y)$ (d) $3y' + y = 2e^{-x}$ (edolcc).

8. Curvas Integrais. Encontre as soluções para $x > 0$. Esboce várias das curvas integrais. Descreva o comportamento da solução, segundo $x \rightarrow 0^+$, para vários valores da constante de integração.

- (a) $y' + \left(\frac{2}{x}\right)y = \frac{1}{x^2}$ (b) $y' - \left(\frac{1}{x}\right)y = x$
 (c) $y' - \left(\frac{1}{x}\right)y = x^{\frac{1}{2}}$ (d) $y' + \left(\frac{1}{x}\right)y = \frac{\cos x}{x}$.

9. Equação Homogênea. Dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, considere a equação

$$\dot{x} = f\left(\frac{x}{t}\right), \text{ onde } t \neq 0.$$

Prove que a troca de variáveis $x = yt$ gera uma edo a variáveis separadas. Resolva as equações abaixo.

- (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{x}$ (c) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{y}$
 (b) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-2xy}{x^2}$ (d) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy+x^2}$

10. Transforme, com mudanças de coordenadas adequadas, a equação da forma

$$\dot{x} = \frac{a_1x + b_1t + c_1}{a_2x + b_2t + c_2}$$

em edol homogênea ou de variáveis separadas. Resolva as equações abaixo.

Dica. Se $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, faça $x = u + \alpha$ e $t = s + \beta$. Senão, $u = a_1x + b_1t$.

- (a) O problema de Cauchy

$$\dot{x} = \frac{2x + t - 1}{x + 2t + 1}, \quad x(0) = 1.$$

- (b) $(1+t-2y)dt + (4t-3y-6)dy = 0$ (c) $(t+2y+3)dt + (2t+4y-1)dy = 0$.

11. **Equações Exatas.** Verifique que são exatas as equações abaixo e as resolva.

(a) $(2x + 3y)dx + (3x + 2y)dy = 0$ (b) $\frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = 0, y > 0$
(c) $(y - x^3)dx + (y^3 + x)dy = 0$ (d) $(3x^2 + y)dx + (x + 4)dy = 0.$

12. **Fator Integrante.** As equações abaixo não são exatas (**cheque**) mas tem um fator integrante dependendo de x ou então um dependendo de y . Resolva-as.

(a) $(3y^2 - x^2 + 1)dx + 2xydy = 0$ (b) $xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$
(c) $(x^2 + y^2)dx + (x^3 + 3xy^2 + 2xy)dy = 0.$

13. Determine condições para que a equação $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ admita um fator integrante da forma $u(x, y) = h(t)$, com $t = xy$. Resolva a equação

$$(2y^2 + 2y)dx + (3xy + 2x)dy = 0.$$

14. Resolva cada um dos problemas de valor inicial

(a) $2xy^3 + 3x^2y^2 \frac{dy}{dx} = 0, y(1) = 1$ (b) $3x^2 + 4xy + (2y^2 + 2x^2) \frac{dy}{dx} = 0, y(0) = 1.$

15. Seja $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, com Ω aberto e um cone em \mathbb{R}^2 (logo, $\lambda\Omega \subset \Omega$ se $\lambda > 0$).

Seja u homogênea de grau p , i.e. $u(\lambda x, \lambda y) = \lambda^p u(x, y)$ se $\lambda > 0$ e $(x, y) \in \Omega$.

Mostre que u satisfaz a equação diferencial parcial

$$pu = xu_x + yu_y \quad [\text{Dica: derive em } \lambda \text{ e faça } \lambda = 1.]$$

16. **Fator Integrante.** Sejam M e N de classe C^1 e homogêneas de grau p definidas num cone aberto simplesmente conexo de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Suponha que $xM(x, y) + yN(x, y)$ não se anule. Mostre que $\mu(x, y) = [xM(x, y) + yN(x, y)]^{-1}$ é um fator integrante para a edol $N(x, y)y' + M(x, y) = 0$.

17. **Fator Integrante.** Resolva as equações abaixo.

(a) $3xy + y^2 + (x^2 + xy) \frac{dy}{dx} = 0$ (b) $(x^2 + y^2) + (x^3 + 3xy^2 + 2xy) \frac{dy}{dx} = 0$
(c) $(3y^2 - x^2 + 1) + 2xy \frac{dy}{dx} = 0.$

18. Resolva cada um dos problemas de valor inicial.

$$2xy^3 + 3x^2y^2 \frac{dy}{dx} = 0, y(1) = 1 \quad 3x^2 + 4xy + (2y^2 + 2x^2) \frac{dy}{dx} = 0, y(0) = 1$$

19. Seja $n \in \mathbb{N}^*$. Determine a família de curvas ortogonais à família $y = \lambda x^n$, $\lambda \in \mathbb{R}, x \in (0, \infty)$. Esboce graficamente tal família.

20. Seja $Q = [a - \delta, a + \delta] \times [b - \delta, b + \delta]$ um quadrado centrado em (a, b) e uma função $G : Q \rightarrow \mathbb{R}$, com $G = G(u, v)$. Mostre que é possível reduzir o PVI

$$(1) \quad \begin{cases} v'(u) &= G(u, v(u)), \\ v(a) &= b. \end{cases}$$

a um PVI da forma

$$(2) \quad \begin{cases} y'(x) &= F(x, y(x)), \\ y(0) &= 0, \end{cases}$$

onde $F = F(x, y)$ é uma função definida no quadrado $[-1, +1] \times [-1, +1]$.

Sugestão. Defina F e $y(x)$ em termos de G e $v(u)$, respectivamente, de tal forma que v seja uma solução de (1) se e somente se y for solução de (2).

21. (a) Resolva $\begin{cases} y' &= 2xy^{\frac{2}{3}}, \\ y(0) &= 1. \end{cases}$

- (b) Veja que o problema $\begin{cases} y' &= 2xy^{\frac{2}{3}}, \\ y(0) &= 0. \end{cases}$ tem mais de uma solução. Isto contraria o Teorema de Picard?

22. Dados $a < 0 < b$, verifique que a função $y(x) = \begin{cases} \frac{(x-a)^3}{27}, & \text{se } x \leq a, \\ 0, & \text{se } a < x < b, \\ \frac{(x-b)^3}{27}, & \text{se } x \geq b, \end{cases}$ é

solução de $\begin{cases} y' &= y^{\frac{2}{3}}, \\ y(0) &= 0. \end{cases}$

23. Mostre que a solução de $\begin{cases} y' &= (y^2 - 1)(y^2 - 2), \\ y(0) &= 0. \end{cases}$ satisfaz as desigualdades $-1 < y(x) < 1$ para todo x do seu domínio. Dica: Teorema de Picard.

24. Para cada uma das funções $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ abaixo, considere a EDO $y' = f(x, y)$. Encontre as soluções maximais desta equação e, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$, discuta a existência e unicidade de soluções para o problema de Cauchy com condição inicial (x_0, y_0) . Esboce os gráficos das soluções.

- (a) $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$ (b) $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x, y) = (xy)^2 - 4x^2$
(c) $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy^3$ (d) $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x, y) = x|y|$
(e) $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x, y) = 5(y - 1)^{4/5}$ (f) $\Omega = \mathbb{R} \times [0, \infty)$, $f(x, y) = 2y^{1/2}$.