MAT 226 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS I - IMEUSP

Lista 2 - EDOL's com Coeficientes Constantes e Reais

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Segundo Semestre de 2017

1. A edolcc $x'' + bx' + cx = R(t)e^{\gamma t}$, com $R = R(t)$ um polinômio e γ uma constante real, tem em $x_p(t) = Q(t)e^{\gamma t}$ uma solução particular se e só se

$$Q'' + p'(\gamma)Q' + p(\gamma)Q = R,$$

onde $p(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c$ é o polinômio característico associado à edolcc.

Justifique que tal solução particular existe e que podemos supor

   (a) $\text{grau}(Q) = \text{grau}(R)$, se γ não é raiz característica de $p(\lambda) = 0$.

   (b) $Q(t) = tQ_1(t)$, $\text{grau}(Q_1) = \text{grau}(R)$, se γ é raiz simples.

   (c) $Q(t) = t^2 Q_1$, $\text{grau}(Q_1) = \text{grau}(R)$, se γ é raiz dupla.

2. Resolva as equações diferenciais.

   a) $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 3x = 0$ b) $\frac{d^2x}{dt^2} - 4x = 0$ c) $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$

   d) $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$ e) $2\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - x = 0$

3. a) Resolva o problema com valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{3dx}{dt} + 2x = 0, \\ x(0) = 0 \text{ e } x'(0) = 1. \end{cases}$$

   b) Esboce o gráfico da solução em a).

4. Determine a solução geral $x = x(t)$ de

   (a) $x''' - x' = 3e^{2t}$

   (b) $x^{(4)} - 7x''' + 18x'' - 20x' + 8x = t^3 e^{2t}$

   (c) $x'' + 2x' + 2x = e^{\alpha t}\text{sen}\beta t$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

   (d) $x^{(4)} + 8x'' + 16x = t^3 \text{sen} 2t$

   (e) $x^{(4)} - 19x'' - 6x' + 72x = 5t^3 e^{-3t}$

   Dica: $\lambda = 2$ e $\lambda = 4$ são raízes características.

5. Determine a solução dos problemas com valores iniciais.

   a) $\frac{dy}{dt} - y = te^t, y(0) = 1$

   b) $\ddot{x} + 4x = cos2t, x(0) = \dot{x}(0) = 0$

   c) $\frac{d^4x}{dt^4} - 16x = -15\sin t, x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1, \ddot{x}(0) = 0, \dddot{x}(0) = -1$

   d) $\frac{dy}{dt} - y = t\cos(5t)e^t$, com $y(0) = 1$

   e) $\ddot{x}(t) + 4x(t) = t^4e^{2t}$, com $x(0) = \dot{x}(0) = 0$

6. Determine a solução geral e real das equações diferenciais

   (a) $x'' - 4x' + 13x = te^{2t}\sin 3t$.

   (b) $x''' - 5x'' + 3x' + 9x = t^4e^{3t}$.

7. Determine a solução geral (e real) da equação diferencial

$$y''' - 3y'' + 4y' - 12y = x^2e^{2x} + x\sin(3x).$$

   Dica: método de superposição de soluções. Ache uma solução particular para $P(d/dt)y = x^2e^{2x}$ e uma solução particular para $P(d/dt)y = x\sin(3x)$

8. Determine a solução geral (e real) da equação diferencial

$$x^{(4)} - 5x^{(3)} + 13x^{(2)} - 19x^{(1)} + 10x = t^2e^t\cos 2t.$$

9. Encontre a solução geral (e real) da equação diferencial

$$x'''' - 16x''' + 96x'' - 256x' + 256x = \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)e^{4t}.$$

10. Consideremos a edo linear com coeficientes constantes

$$\left(\frac{d}{dt} - \alpha I\right)^4 x = 0, \text{ onde } \alpha \in \mathbb{R}.$$

   Mostre que as soluções são

$$x(t) = c_1e^{\alpha t} + c_2te^{\alpha t} + c_3t^2e^{\alpha t} + c_4t^3e^{\alpha t}, \text{ com } c_{i's} \in \mathbb{R}.$$

11. Mostre que as funções $e^{\alpha t}, te^{\alpha t}, \ldots, t^{n-1}\alpha t$ são soluções de

$$\left(\frac{d}{dt} - \alpha I\right)^n x = 0, \text{ onde } \alpha \in \mathbb{R}.$$