

MAT 226 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS I - IMEUSP

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Segundo semestre de 2022

LISTA 1 DE EXERCÍCIOS

1. Escreva na forma binômica ($z = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$) os números complexos:

$$(a) (4-i) + i - (6+3i)i \qquad (b) \frac{5}{-3+4i} \qquad (c) \frac{3-i}{4+5i}.$$

2. Determine e represente graficamente:

$$(a) \text{ as raízes quadradas de } 1. \qquad (b) \text{ as raízes cúbicas de } 1.$$

3. Seja $p \in \mathbb{R}[x]$ tal que $p(1-i) = 3+2i$. Compute $p(1+i)$.

4. Sejam a, b e c as raízes de $x^3 + 3x^2 - x + 1 = 0$. Calcule:

$$(A) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \qquad (B) a^2 + b^2 + c^2.$$

5. Sabendo que $1-i$ é raiz de $z^4 - 6z^3 + 11z^2 - 10z + 2 = 0$, ache todas as raízes.

6. **(Raízes Quadradas)** Determine (elementarmente, isto é, sem utilizar Fórmula de Moivre ou Fórmula de Euler) as soluções $z \in \mathbb{C}$ da equação

$$z^2 = a + ib, \quad \text{onde } a, b \in \mathbb{R}.$$

Dica: Determine as partes real e imaginária de z e uma fórmula para z .

7. Ache k tal que $z^3 - 5 - 4z$ divida $3z^2 - 2z^4 + z^5 - z^3 - 2z + k$.

8. Resolva a equação $iz + 2\bar{z} + 1 - i = 0$.

9. Resolva os sistemas lineares em z e w :

$$a) \begin{cases} z + iw = 1 \\ iz + w = 2i - 1 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} iz + (1+i)w = 1 \\ (1+i)\bar{z} - (6+i)\bar{w} = -4 - 8i \end{cases}.$$

10. (FUVEST 2006) Determine os números complexos z que satisfazem, simultaneamente, $|z| = 2$ e $\operatorname{Im}\left(\frac{z-i}{1+i}\right) = \frac{1}{2}$.

11. Seja $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, e $a_j \in \mathbb{C}$, para $j = 0, \dots, n$. Seja z_0 fixo em \mathbb{C} . Mostre que existem coeficientes b_0, \dots, b_n em \mathbb{C} tais que

$$p(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \dots + b_n(z - z_0)^n, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Sugestão: escreva $p(z) = p(z - z_0 + z_0)$.

12. Seja $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, e $a_j \in \mathbb{C}$, para $j = 0, \dots, n$, com $\operatorname{grau}(p) = n$ (i.e., $a_n \neq 0$). Seja z_0 fixo em \mathbb{C} . Considere a função $P(z) = p(z + z_0)$.

(A) Mostre que P é um polinômio.

(B) Mostre que P e p tem mesmo grau e mesmo coeficiente dominante: a_n .

(C) Mostre que o termo independente de P é $p(z_0)$.

13. A derivada (formal) de um polinômio

$$p(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$$

é definida como o polinômio

$$p'(X) = na_nX^{n-1} + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + \dots + a_1.$$

Mostre que:

(A) α é raiz simples de p se e só se $p(\alpha) = 0$ e $p'(\alpha) \neq 0$.

(B) α é raiz dupla de p se e só se $p(\alpha) = p'(\alpha) = 0$ e $p''(\alpha) \neq 0$.

(C) α é raiz de multiplicidade k ($k \leq n$) de p se e só se

$$p(\alpha) = p'(\alpha) = \dots = p^{(k-1)}(\alpha) = 0 \text{ e } p^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

14. (Fórmula de Taylor) Mostre que um polinômio de grau n pode ser escrito:

$$p(X) = p(\alpha) + p'(\alpha)(X - \alpha) + \frac{p''(\alpha)}{2!}(X - \alpha)^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!}(X - \alpha)^n.$$