## MAT 226 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS I - IMEUSP

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Segundo semestre de 2017

## LISTA 1 DE EXERCÍCIOS

1. Escreva na forma binômica ($z = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$) os números complexos:

   $(a)\ (4-i)+i-(6+3i)i$ $\qquad (b)\ \dfrac{5}{-3+4i}$ $\qquad (c)\ \dfrac{3-i}{4+5i}$ .

2. Determine e represente graficamente:

   (a) as raízes quadradas de 1. $\qquad$ (b) as raízes cúbicas de 1.

3. Seja $p \in \mathbb{R}[x]$ tal que $p(1-i) = 3+2i$. Compute $p(1+i)$.

4. Sejam $a, b$ e $c$ as raízes de $x^3 + 3x^2 - x + 1 = 0$. Calcule:

   $(A)\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$ $\qquad (B)\ a^2 + b^2 + c^2$ .

5. Sabendo que $1-i$ é raiz de $z^4 - 6z^3 + 11z^2 - 10z + 2 = 0$, ache todas as raízes.

6. **(Raízes Quadradas)** Determine (elementarmente, isto é, sem utilizar Fórmula de Moivre ou Fórmula de Euler) as soluções $z \in \mathbb{C}$ da equação

   $$z^2 = a + ib, \qquad \text{onde } a, b \in \mathbb{R}.$$

   Dica: Determine as partes real e imaginária de $z$ e uma fórmula para $z$.

7. Ache $k$ tal que $z^3 - 5 - 4z$ divida $3z^2 - 2z^4 + z^5 - z^3 - 2z + k$.

8. Resolva a equação $iz + 2\overline{z} + 1 - i = 0$.

9. Resolva os sistemas lineares em $z$ e $w$:

   $a)\ \begin{cases} z + iw &= 1 \\ iz + w &= 2i - 1 \end{cases}$ $\qquad b)\ \begin{cases} iz + (1+i)w &= 1 \\ (1+i)\overline{z} - (6+i)\overline{w} &= -4 - 8i \end{cases}$ .

10. (FUVEST 2006) Determine os números complexos z que satisfazem, simultaneamente, $|z| = 2$ e $\text{Im}\left(\frac{z-i}{1+i}\right) = \frac{1}{2}$.

11. Seja $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, e $a_j \in \mathbb{C}$, para $j = 0, \ldots, n$. Seja $z_0$ fixo em $\mathbb{C}$. Mostre que existem coeficientes $b_0, \ldots, b_n$ em $\mathbb{C}$ tais que

$$p(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \ldots + b_n(z - z_0)^n \ , \forall z \in \mathbb{C}.$$

Sugestão: escreva $p(z) = p(z - z_0 + z_0)$.

12. Seja $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, e $a_j \in \mathbb{C}$, para $j = 0, ..., n$, com grau$(p) = n$ (i.e., $a_n \neq 0$). Seja $z_0$ fixo em $\mathbb{C}$. Considere a função $P(z) = p(z + z_0)$.

    (A) Mostre que $P$ é um polinômio.

    (B) Mostre que $P$ e $p$ tem mesmo grau e mesmo coeficiente dominante: $a_n$.

    (C) Mostre que o termo independente de $P$ é $p(z_0)$.

13. A derivada (formal) de um polinômio

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

é definida como o polinômio

$$p'(X) = n a_n X^{n-1} + (n-1) a_{n-1} X^{n-2} + \cdots + a_1.$$

Mostre que:

    (A) $\alpha$ é raíz simples de $p$ se e só se $p(\alpha) = 0$ e $p'(\alpha) \neq 0$.

    (B) $\alpha$ é raíz dupla de $p$ se e só se $p(\alpha) = p'(\alpha) = 0$ e $p''(\alpha) \neq 0$.

    (C) $\alpha$ é raíz de multiplicidade $k$ $(k \leq n)$ de $p$ se e só se

$$p(\alpha) = p'(\alpha) = \cdots = p^{(k-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{e} \quad p^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

14. (Fórmula de Taylor) Mostre que um polinômio de grau $n$ pode ser escrito:

$$p(X) = p(\alpha) + p'(\alpha)(X - \alpha) + \frac{p''(\alpha)}{2!}(X - \alpha)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!}(X - \alpha)^n.$$