

MAT 226 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS I (IMEUSP -2017)

Capítulo NÚMEROS COMPLEXOS

Professor Oswaldo R. B. de Oliveira

<http://www.ime.usp.br/~oliveira> oliveira@ime.usp.br

Este Capítulo - Números Complexos, se baseia em um texto do Prof. Franciso César Polcino Millies sobre a origem dos números complexos, em notas de aulas do Prof. Jorge Aragona, em T. M. Apostol, *Análisis Matemático*, segunda edición, Ed. Reverté, e na palestra *Argand e o Teorema Fundamental da Álgebra*, <https://www.ime.usp.br/~oliveira/TFA-ARGAND.pdf>.

Capítulo - NÚMEROS COMPLEXOS

- 1.1 - Sobre a origem dos números complexos.
- 1.2 - O corpo \mathbb{C} . A representação geométrica de \mathbb{C} por Argand-Gauss.
- 1.3 - O corpo \mathbb{C} não é ordenável.
- 1.4 - O conjugado e o módulo de um número complexo.
- 1.5 - A interpretação geométrica de \mathbb{C} , baseada em Argand.

Capítulo 1

NÚMEROS COMPLEXOS

1.1 - Sobre a Origem dos Números Complexos

Os comentários a seguir apóiam-se nas recomendáveis notas do Prof. Francisco César Polcino Millies, “A emergência dos Números complexos” (15 páginas).

Tais números surgiram, ao menos, com as equações do segundo grau nas tabuletas de argila da Suméria, c. 1700 a.C. A total formalização dos números complexas foi obtida em 1833 pelo irlandês W. R. Hamilton (1805 – 1865).

O fato de um número negativo não ter raiz quadrada parece ter sido sempre conhecido pelos matemáticos que se depararam com a questão. Contrariamente ao bom senso, não foram as equações do segundo grau que motivaram a aceitação de tal campo numérico mas sim as de terceiro grau. As equações de segundo grau eram vistas como a formulação matemática de um problema concreto ou geométrico e se no processo de resolução surgia uma raiz quadrada de um número negativo, isto era interpretado como prova de que tal problema não tinha solução. Exemplificamos abaixo com um problema na *Arithmetica* de Diofanto (275 d.C.).

Problema: Determinar os lados de um triângulo retângulo de área igual a 7 e perímetro igual a 12 unidades.

Solução: indicando por x e y os comprimentos dos catetos temos

$$\frac{xy}{2} = 7 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = (12 - x - y)^2 .$$

Desenvolvendo a segunda equação temos $12x + 12y = 72 + xy$ e nesta pondo $y = \frac{14}{x}$,

$$6x^2 - 43x + 84 = 0 \implies x = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{12} .$$

Aqui, Diofanto observa que só poderia haver solução se

$$\left(\frac{172}{2}\right)^2 > \frac{24}{336}.$$

Neste contexto é supérfluo procurar um sentido para a expressão $\sqrt{-167}$.

O primeiro a perceber a premência dos números complexos (ainda que, naturalmente, de modo vago e confuso) foi o italiano R. Bombelli (c. 1526-1573), autor de *l'Algebra* (3 volumes, 1572, Veneza). Na página 294, Bombelli aplica à equação $x^3 = 15x + 4$, a fórmula de Tartaglia-Cardano ¹ para as raízes e obtém:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Notando que $x = 4$ é uma raiz da equação Bombelli cogita que tal valor está implícito na expressão para as raízes e que é possível dar um sentido à expressão $2 \pm \sqrt{-121}$ e definir operações entre expressões análogas, tais como adição, multiplicação, radiciação, etc. de modo que $x = 4$ seja apenas um dos valores obtidos através destas. Assim, nasce uma situação em que apesar da presença de radicais de números negativos, existe uma solução da equação dada. É um fenômeno novo, difícil de entender mas relevante e é necessário compreendê-lo com profundidade.

A partir do trabalho de Bombelli os números complexos começam a ser utilizados como um “algoritmo que funciona” para resolver equações de terceiro grau mas, ao mesmo tempo, era claro que tais números não poderiam existir. Uma das grandes dificuldades em admitir a existência dos complexos era a ausência de uma representação geométrica ou de uma interpretação física destes números. A obtenção da representação geométrica, que lhes deu a “cidadania” definitiva na matemática foi também árdua. Principiou em 1673 com o inglês J. Wallis (1616-1703) e continuou com os franceses A. de Moivre (1667-1754) e J. D’Alembert (1717-1783), o inglês R. Cotes (1682-1716), o suíço L. Euler (1707-1783), etc. e pode-se dizer que estabelecida pelo norueguês C. Wessel (1745-1818) em 1799, pelo francês J. R. Argand (1768-1822) em 1806 e o alemão C. F. Gauss (1777-1855) em 1831, que cunhou a expressão um tanto inapropriada “números complexos”. A formalização completa deve-se, como já mencionamos a W. Hamilton.

¹ Os italianos Nicollo Tartaglia (c. 1500-1557) e G. Cardano (1501-1576).

1.2 - O Corpo \mathbb{C} . A representação geométrica de \mathbb{C} , por Argand-Gauss.

No que segue \mathbb{R} é o corpo ordenado completo dos números reais com métrica

$$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty), \quad d(x, y) = |x - y|,$$

e $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é o espaço vetorial real dado pelas operações: se $a, b, c, d, \lambda \in \mathbb{R}$,

◦ adição: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$

◦ multiplicação por escalar: $\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b).$

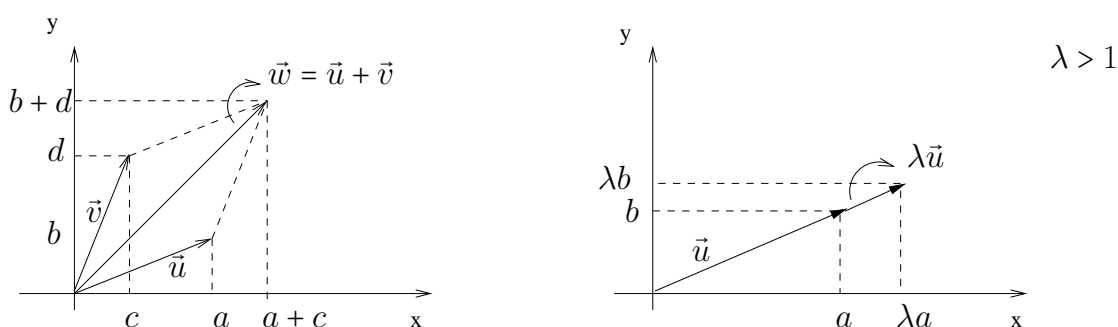


Figura 1.1: adição e multiplicação por escalar real

A operação de adição tem as propriedades: dados $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{R}^2$,

◊ associativa: $(a, b) + [(c, d) + (e, f)] = [(a, b) + (c, d)] + (e, f)$

◊ comutativa: $(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b)$

◊ existência do neutro: $(a, b) + (0, 0) = (a, b)$

◊ existência do oposto: $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0);$

e a operação multiplicação por escalar: dados $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$,

◊ $\lambda_1[\lambda_2(a, b)] = (\lambda_1\lambda_2)(a, b)$ ◊ $1 \cdot (a, b) = (a, b)$

◊ $(\lambda_1 + \lambda_2)(a, b) = \lambda_1(a, b) + \lambda_2(a, b)$ ◊ $\lambda[(a, b) + (c, d)] = \lambda(a, b) + \lambda(c, d).$

Com tais operações \mathbb{R}^2 é um espaço vetorial real de dimensão dois.

Definiremos uma multiplicação em \mathbb{R}^2 adaptada às regras operatórias esperadas para a multiplicação de números complexos. Informalmente introduzindo os “números”

$$i, \text{ onde } i^2 = -1, a + bi \text{ e } c + di, \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

e desejando manter as propriedades comutativas, associativas e distributivas em \mathbb{R} , esperamos que

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i .$$

Desta forma, dados $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ definimos a operação

$$(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc) .$$

1.1 Proposição. *O conjunto \mathbb{R}^2 munido com as operações $+$ e $*$, então indicado $(\mathbb{R}^2, +, *)$, é um corpo.*

Prova.

As propriedades da adição para $(\mathbb{R}^2, +, *)$ decorrem das propriedades da adição para \mathbb{R}^2 como um espaço vetorial (enunciadas acima) .

Dados $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{R}^2$ temos as propriedades para a operação $*$:

◇ associativa: $(a, b) * [(c, d) * (e, f)] = [(a, b) * (c, d)] * (e, f)$

◇ comutativa: $(a, b) * (c, d) = (c, d) * (a, b)$

◇ existência do ele/o neutro: $(a, b) * (1, 0) = (a, b)$

◇ existência do ele/o inverso: $\forall (a, b) \neq (0, 0)$, existe $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$(a, b) * (u, v) = (1, 0)$$

◇ distributiva: $(a, b) * [(c, d) + (e, f)] = (a, b) * (c, d) + (a, b) * (e, f)$.

Verificação da associatividade:

$$\begin{aligned} (a, b) * [(c, d) * (e, f)] &= (a, b) * (ce - df, cf + de) = \\ &= (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)) \\ &= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e) \\ &= (ac - bd, ad + bc) * (e, f) = [(a, c) * (b, d)] * (e, f) . \end{aligned}$$

A comutatividade e a existência do neutro são bem fáceis de deduzir.

A existência do inverso segue do sistema linear real nas variáveis u e v ,

$$au - bv = 1, \quad bu + av = 0.$$

Tal sistema têm determinante $a^2 + b^2 \neq 0$ e solução única dada por,

$$u = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{vmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{vmatrix} = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad v = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Por fim, a propriedade distributiva:

$$\begin{aligned} (a, b) * [(c, d) + (e, f)] &= (a, b) * (c + e, d + f) = \\ &= (a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)) \\ &= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) \\ &= (a, b) * (c, d) + (a, b) * (e, f) \clubsuit \end{aligned}$$

1.2 Definição. $(\mathbb{R}^2, +, *)$ é o corpo dos números complexos, indicado por \mathbb{C} .

Nos referimos a \mathbb{C} como corpo dos números complexos ou **plano complexo**. Por construção, \mathbb{R}^2 e \mathbb{C} são conjuntos iguais e o mesmo espaço vetorial. Ao enfatizarmos as estruturas de espaço vetorial ou corpo escreveremos \mathbb{R}^2 ou \mathbb{C} , respectivamente. Mostremos que \mathbb{C} contém um subcorpo isomorfo a \mathbb{R} .

Consideremos a aplicação, evidentemente injetora,

$$j : a \in \mathbb{R} \mapsto (a, 0) \in \mathbb{C}.$$

É fácil mostrar que j preserva as operações de adição e multiplicação. De fato, quaisquer que sejam $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{cases} j(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = j(a) + j(b), \\ j(ab) = (ab, 0) = (a, 0) * (b, 0) = j(a)j(b). \end{cases}$$

Assim, j é um isomorfismo de corpos e

$$\text{Im}(j) = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$$

é subcorpo de \mathbb{C} isomorfo a \mathbb{R} (vide Figura 1.2). Por tal isomorfismo não há diferença algébrica entre \mathbb{R} e $\text{Im}(j)$ e passamos a identificá-los, assim como identificamos o número a e o par $j(a) = (a, 0)$.

A multiplicação por escalar real herdada de \mathbb{R}^2 não conflita com $*$. De fato, se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ temos,

$$\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b) \quad \text{e} \quad \lambda * (a, b) = (\lambda, 0) * (a, b) = (\lambda a - 0.b, \lambda b + 0.a) = (\lambda a, \lambda b).$$

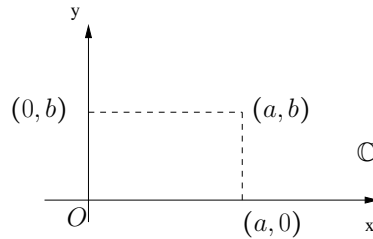


Figura 1.2: Eixo x isomorfo a \mathbb{R} por j

Doravante, omitimos o símbolo $*$ e escrevemos $(a, b)(c, d)$ para $(a, b) * (c, d)$.

Os elementos $0 = (0, 0)$ e $1 = (1, 0)$ são, respectivamente, os elementos neutros da adição e da multiplicação em \mathbb{C} . Ao passo que o par ordenado $(0, 1)$ satisfaz $(0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$ e é indicado por i . Logo,

$$i^2 = -1.$$

Com tais identificações, temos $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + b(0, 1) = a + bi$ e

$$(a + ib)(c + id) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

É usual indicar um número complexo por z , w e ζ . Se $z = a + ib \in \mathbb{C}$, a é a **parte real** de z e b é a **parte imaginária** de z . Indicando $a = \text{Re}(z)$ e $b = \text{Im}(z)$, temos

$$z = \text{Re}(z) + i\text{Im}(z), \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

A **representação geométrica** de $z \in \mathbb{C}$ é igual a de \mathbb{R}^2 , seja pelo ponto do plano cujas coordenadas são, ordenadamente, as partes real e imaginária de z , dito **afixo** de z , seja pelo vetor com origem $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ e extremidade final o afixo de z .

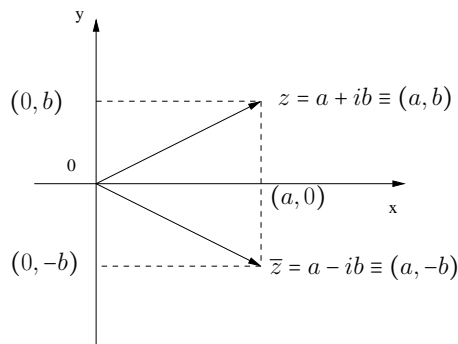


Figura 1.3: Representação geométrica de z e de $\bar{z} = a - ib$

O eixo das abscissas, $\{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$, é o **eixo real** e o eixo das ordenadas, $\{(0, b) : b \in \mathbb{R}\}$, é o **eixo imaginário**. Tal representação é o **plano de Argand-Gauss**.

1.3 - O corpo \mathbb{C} não é ordenável.

1.3 Definição. O corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ é dito ordenado se houver $P \subset \mathbb{K}^*$ tal que:

(a) para todo $x \in \mathbb{K}$ temos: ou $x = 0$ ou $x \in P$ ou $-x \in P$;

(b) para quaisquer x e y , ambos em P , temos: $x + y \in P$ e $xy = x \cdot y \in P$.

Indicamos $x \in P$ por $x > 0$ e $x > y$ por $x - y > 0$.

1.4 Teorema. O corpo \mathbb{C} não pode ser ordenado.

Prova.

Seja $P \subset \mathbb{C}^*$, com P satisfazendo as condições (a) e (b) na Definição 1.3.

Pela condição (a), segue que $i \in P$ ou $-i \in P$. De todo modo, por (b) segue

$$i \cdot i = (-i)(-i) = -1 \in P.$$

Então, pela condição (b),

$$(-1)(-1) = 1 \in P.$$

Por fim, pela condição (b),

$$1 + (-1) = 0 \in P \not\checkmark$$

1.4 - O conjugado e o módulo² de um número complexo.

O conjugado de $z = a + bi \in \mathbb{C}$ é o número $\bar{z} = a - bi$. Valem as relações,

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(\bar{z}) \text{ e } \operatorname{Im}(z) = -\operatorname{Im}(\bar{z}).$$

Geométricamente (v. fig. 1.3) \bar{z} é o simétrico de z em relação ao eixo real. Temos

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ e } \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

A conjugação $z \in \mathbb{C} \mapsto \bar{z} \in \mathbb{C}$ é um automorfismo de corpo que fixa o corpo \mathbb{R} .

1.5 Proposição (Propriedades da Conjugação). Sejam $z \in \mathbb{C}$ e $w \in \mathbb{C}$.

(a) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$, $\overline{\bar{z}} = z$ e, ainda, $\bar{\bar{z}} = z$ se e só se $z \in \mathbb{R}$.

(b) Se $z \neq 0$, então $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$.

²O módulo de um número complexo foi introduzido por Argand.

Prova.

(a) Segue trivialmente da definição de conjugado.

(b) Como $z \frac{1}{z} = 1$, por (a) temos $\overline{z \left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{1} = 1$. Logo, $\overline{z^{-1}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$ ♣

Os números complexos da forma bi , com $b \in \mathbb{R}$, são ditos **imaginários puros**.

O **módulo** de $z = a + ib$, com a e b reais, é:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}.$$

Geometricamente, o módulo de $z \in \mathbb{C}$ é a distância do afixo de z à origem.

Indicamos o máximo e o mínimo entre dois números a e b por, respectivamente,

$$\max(a, b) \text{ e } \min(a, b).$$

1.6 Proposição (Propriedades do Módulo). *Sejam z e w , ambos em \mathbb{C} .*

(a) $|z| = |\overline{z}|$ e $z\overline{z} = |z|^2$.

(b) $|zw| = |z||w|$ e, se $z \neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

(c) $\max(|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|) \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$.

Prova. Seja $z = a + bi$, com a e b pertencentes a \mathbb{R} .

(a) Segue das identidades $|a + ib| = |a - ib|$ e $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$.

(b) Por (a) e pela Proposição 1.5(a) temos, $|zw|^2 = zw\overline{z\overline{w}} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2$; donde segue a primeira afirmação do item (b) e desta afirmação, se $z \neq 0$, segue claramente que

$$1 = \left|z \frac{1}{z}\right| = |z| \left|\frac{1}{z}\right| \text{ e portanto } \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}.$$

(c) Segue de $\max(|a|, |b|) \leq \sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$ ♣

1.7 Corolário. *Seja $z \in \mathbb{C}^*$. Temos,*

(a) $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{|z|} \left(\frac{\overline{z}}{|z|}\right)$ e $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$. (b) Se $|z| = 1$ então $z^{-1} = \overline{z}$.

Prova.

(a) Pela Proposição 1.6 segue $z \frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1$. Também segue $\left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{|\overline{z}|}$.

(b) Segue de (a) ♣

Pela identificação $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$, como espaços vetoriais sobre \mathbb{R} , destacamos:

1.8 Proposição. *A função módulo, $|\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow [0, +\infty)$, é uma norma sobre \mathbb{C} :*

- (a) $|z| = 0$ se, e só se, $z = 0$.
- (b) $|\lambda z| = |\lambda||z|$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e para todo $z \in \mathbb{C}$.
- (c) $|z + w| \leq |z| + |w|$, quaisquer que sejam $z, w \in \mathbb{C}$ (desigualdade triangular).

Prova.

- (a) Evidentemente, $|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) = 0$.
- (b) Um caso particular da Proposição 1.6(b).
- (c) Não é difícil ver que,

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z + w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\ &= (|z| + |w|)^2 \clubsuit \end{aligned}$$

1.9 Corolário. $|z - w| \geq ||z| - |w||$, quaisquer que sejam $z, w \in \mathbb{C}$.

Prova.

Pela desigualdade triangular, $|z| = |(z - w) + w| \leq |z - w| + |w|$ e então, $|z - w| \geq |z| - |w|$. Analogamente, $|w - z| \geq |w| - |z|$. A conclusão é trivial \clubsuit

A Proposição 1.8 (c) e seu corolário são, respectivamente, a primeira e a segunda desigualdade triangular e expressam as propriedades geométricas:

- o comprimento de um dos lados de um triângulo é menor que a soma, e maior que a diferença, dos comprimentos dos outros dois lados.

Se os vetores $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$ correspondem a $z = a + bi$ e $w = c + di$, respectivamente, onde a, b, c e d são reais, e $u \cdot v$ indica o produto interno em \mathbb{R}^2 de u por v , o chamado **produto interno complexo** $z\overline{w}$ satisfaz (para $z \neq 0$ e $w \neq 0$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re}(z\overline{w}) = ac + bd = u \cdot v \quad [\text{mede o (menor) ângulo não orientado entre } u \text{ e } v] \\ \operatorname{Im}(z\overline{w}) = \begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix} \quad [\text{a área (orientada) do paralelogramo determinado por } v \text{ e } u]. \\ z\overline{w} = (|z||w|) \frac{z}{|z|} \frac{\overline{w}}{|w|} \quad [\text{mede o ângulo orientado de } v \text{ até } u]. \end{array} \right.$$

Enfatizamos que **ângulo** é formalizado e utilizado a partir do Capítulo 7.

1.5 - A interpretação geométrica de \mathbb{C} , baseada em Argand.

Nesta seção utilizamos informalmente a noção de *ângulo* (vide capítulo 7).

Na reta real (um espaço vetorial real uni-dimensional), a função $f(x) = \lambda x$, onde $x \in \mathbb{R}$, determinada pela multiplicação por uma constante $\lambda > 0$, é chamada de uma dilatação (se $\lambda > 1$) ou uma contração (se $0 < \lambda < 1$). Ainda em \mathbb{R} , a função $g(x) = -x = (-1)x$, onde $x \in \mathbb{R}$, pode ser interpretada como uma reflexão em relação à origem. Ainda mais, fixado qualquer real $\mu \neq 0$, a função $h(x) = \mu x$, onde x é uma variável real, é denominada uma homotetia. Percebemos então que uma homotetia em \mathbb{R} é a composição de uma dilatação, ou de uma contração, com uma reflexão (uma delas pode não participar da composição).

Identificando \mathbb{R} com o eixo real no plano \mathbb{R}^2 , interpretamos a associação

$$x \rightarrow -x, \text{ onde } x \in \mathbb{R},$$

como uma rotação de 180 graus (π rad) no sentido anti-horário.

A seguir, utilizamos informalmente o símbolo $\sqrt{-1}$.

No corpo complexo \mathbb{C} (identificado ao plano, como espaço vetorial real bi-dimensional), temos

$$\sqrt{-1} \cdot [\sqrt{-1} \cdot 1] = (\sqrt{-1})^2 = -1.$$

Isto é, multiplicando a unidade 1 por $\sqrt{-1}$ e o resultado obtido novamente por $\sqrt{-1}$, obtemos o número -1 . Assim,

$$\sqrt{-1}\sqrt{-1}$$

representa uma rotação de 180 graus no sentido anti-horário. Torna-se então natural interpretar a função (operação)

$$T(z) = (\sqrt{-1})z, \text{ onde } z \in \mathbb{C},$$

como uma **rotação** de 90 graus (ou de $\pi/2$ rad).

Desta forma, indicamos o número $\sqrt{-1}$ como o ponto do plano cartesiano \mathbb{R}^2 obtido ao girarmos o ponto $(1, 0)$ (identificado com a unidade 1) por 90 graus (no sentido anti-horário). Temos então a identificação

$$i \equiv (0, 1) \in \mathbb{R}^2.$$

Como citado, todo número real a (não nulo) determina uma homotetia em \mathbb{R} . Ainda, a determina uma homotetia também em \mathbb{C} ao definirmos

$$z \mapsto az, \text{ onde } z \in \mathbb{C}.$$

Identifiquemos o número real a com tal homotetia. Devido à identificação entre \mathbb{C} e \mathbb{R}^2 e ao isomorfismo entre o espaço vetorial das aplicações lineares de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 e o espaço vetorial das matrizes reais dois por dois, podemos então identificar o número a com a homotetia em \mathbb{R}^2 associada à matriz

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

no espaço $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes 2×2 com coeficientes reais.

A seguir, consideremos a rotação de 90 graus no sentido anti-horário

$$Rot : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

já identificada ao número i . Seja $\{e_1, e_2\}$ a base canônica de \mathbb{R}^2 . Desta forma,

$$Rot(e_1) = e_2 \text{ e } Rot(e_2) = -e_1.$$

A matriz associada à transformação linear Rot é então

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, ao número complexo $a + bi$, com a e b reais, associemos a matriz

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Solicito ao leitor verificar que tal associação é injetora, preserva as operações de adição e multiplicação e que a imagem de \mathbb{C} por tal aplicação é um corpo.

A seguir suponhamos $z = a + bi \neq 0$. Notemos que

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{pmatrix}.$$

Escrevemos então,

$$\sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

onde $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ e θ é um ângulo no intervalo $[0, 2\pi]$. Seja R_θ a matriz no lado direito. Temos então z identificado à transformação linear

$$(\rho R_\theta) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Portanto, z é identificado à composição de uma homotetia ($\rho > 0$) e uma rotação.

Enfatizemos a identificação/interpretação de i como a rotação:

$$i \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que (como é de se esperar)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observemos também que valem as duas identificações para $z = a + bi$

$$z \equiv a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad z \equiv \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

A identificação à esquerda revela que \mathbb{C} é fechado para a soma e um espaço vetorial real. Com a identificação à direita, é fácil mostrar que $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ é um grupo abeliano (isto é, o produto é associativo e também comutativo já que as operações “homotetia” e “rotação” comutam em \mathbb{R}^2). A propriedade distributiva é herdada da propriedade distributiva em $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Vale a relação entre módulo em \mathbb{C} e determinantes:

$$|z|^2 = a^2 + b^2 = \det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

A conjugação em \mathbb{C} corresponde, nesta interpretação, à transposição. Isto é,

$$\bar{z} = a - bi \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^t.$$

Em suma, podemos interpretar \mathbb{C} como a álgebra comutativa formada pelas homotetias e rotações do plano com as operações de soma e composição. Como tais operações são inversíveis, tal álgebra é de fato um corpo.