

MAT 225 - FUNÇÕES ANALÍTICAS

Instituto de Matemática e Estatística da USP

Ano 2015

Professor Oswaldo R. B. de Oliveira

<http://www.ime.usp.br/~oliveira> oliveira@ime.usp.br

Capítulo 9 - Teorema da Aplicação e Esfera de Riemann e Aplicações Conformes

- 9.1 - Conformalidade.
- 9.2 - Automorfismos (analíticos) do disco aberto $B(0;1)$.
- 9.3 - Teorema da Aplicação de Riemann.
- 9.4 - Esfera de Riemann.
- 9.5 - Simplesmente conexos e a esfera de Riemann
- 9.6 - Transformações de Möbius.
- 9.7 - As bijeções conformes (analíticas) do semi-plano superior em $B(0;1)$.
- 9.8 - Automorfismos (analíticos) do semiplano superior.
- 9.9 - Outras transformações conformes (analíticas).

Capítulo 1

NÚMEROS COMPLEXOS

Capítulo 2

TOPOLOGIA DO PLANO \mathbb{C}

Capítulo 3

TEOREMAS POLINOMIAIS

Capítulo 4

SÉRIES E SOMABILIDADE

Capítulo 5

SÉRIES DE POTÊNCIAS

Capítulo 6

FUNÇÕES ANALÍTICAS

Capítulo 7

EXPONENCIAL, ÍNDICE, PRINCÍPIO DO ARGUMENTO E TEOREMA DE ROUCHÉ

Capítulo 8

TEOREMA DE CAUCHY HOMOTÓPICO E LOGARITMO

Capítulo 9

TEOREMA DA APLICAÇÃO E ESFERA DE RIEMANN E APLICAÇÕES CONFORMES

9.1 - Conformalidade

Dados z e w , ambos em \mathbb{C}^* , o ângulo (orientado) formado pelo par ordenado (z, w) é o número real $\theta = \arg(w\bar{z})$ [definido módulo $2\pi\mathbb{Z}$] que satisfaz

$$\frac{w\bar{z}}{|w||z|} = e^{i\theta}.$$

Se $z = |z|e^{i\alpha}$ e $w = |w|e^{i\beta}$, então $\theta = \beta - \alpha$. Isto é, $\arg(w\bar{z}) = \arg(w) - \arg(z)$.

No particular caso na figura abaixo, no plano de Argand-Gauss, θ é o ângulo do ponto z ao ponto w , medido no sentido anti-horário.

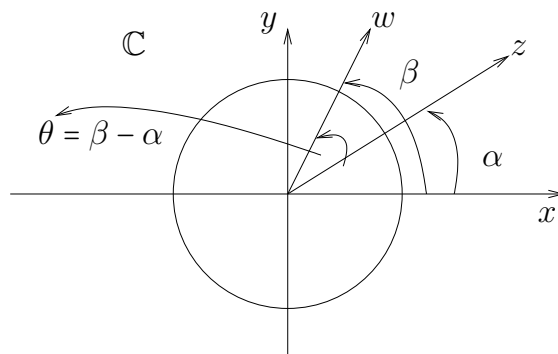


Figura 9.1: $\theta = \arg(w\bar{z})$, mod 2π

Comentários.

- Na figura 9.1, orientamos o ângulo de z a w no sentido anti-horário. Também podemos orientar o ângulo de z a w no sentido horário. De fato, pondo $w = |w|e^{-i(2\pi-\beta)}$ temos

$$\frac{w\bar{z}}{|w||z|} = e^{-i(2\pi-\beta)-i\alpha} = e^{-i[\alpha+(2\pi-\beta)]}$$

que é igual a $e^{i(\beta-\alpha)} = e^{i\theta}$.

- Identifiquemos $w = a + bi \equiv v = (a, b)$ e $z = c + di \equiv u = (c, d)$. Indiquemos o produto interno em \mathbb{R}^2 por ' \cdot '. Notemos que (vide Corolário 1.9)

$$w\bar{z} = (ac + bd) + i(bc - ad) \quad \text{e} \quad v \cdot u = ac + bd.$$

Valem as propriedades abaixo (com $w \neq 0$ e $z \neq 0$ se preciso e θ, β em \mathbb{R}).

- $\operatorname{Re}(w\bar{z}) = v \cdot u$.
- Se $\frac{w\bar{z}}{|w||z|} = e^{i\theta}$ então $v \cdot u = |v||u| \cos \theta$.
- Suponhamos $v \cdot u = |v||u| \cos \beta$. Segue $\frac{\operatorname{Re}(w\bar{z})}{|w||z|} = \cos(\beta)$ e notemos que $\cos(-\beta) = \cos \beta$. Ainda, $\frac{\operatorname{Im}(w\bar{z})}{|w||z|}$ é $\sin \beta$ ou é $-\sin \beta = \sin(-\beta)$. Portanto,

$$\frac{w\bar{z}}{|w||z|} \in \{e^{i\beta}, e^{-i\beta}\} \clubsuit$$

Seja $J = [a, b]$ um intervalo não degenerado arbitrário em \mathbb{R} . Uma curva de classe C^1 é uma aplicação $\gamma : J \rightarrow \mathbb{C}$ com derivada $\gamma' : J \rightarrow \mathbb{C}$ contínua em J . Notação: $\gamma \in C^1$.

A curva γ é dita **regular** se γ é de classe C^1 e a derivada γ' não se anula. Uma curva regular γ tem em cada ponto $\gamma(t_0)$ uma **reta tangente**

$$T : z = \gamma(t_0) + \lambda\gamma'(t_0), \quad \text{onde } \lambda \text{ varia em } \mathbb{R},$$

orientada na direção e sentido do vetor $\gamma'(t_0)$ em \mathbb{C}^* . Vide Figura 9.2, a seguir. O vetor $\gamma'(t_0)$ é referido como **direção tangente** [à curva γ e no ponto $\gamma(t_0)$]. Podemos descrever tal direção (e sentido) com o **vetor tangente unitário**

$$\frac{\gamma'(t_0)}{|\gamma'(t_0)|} \in S^1$$

ou, ainda, um ângulo $\arg[\gamma'(t_0)]$.

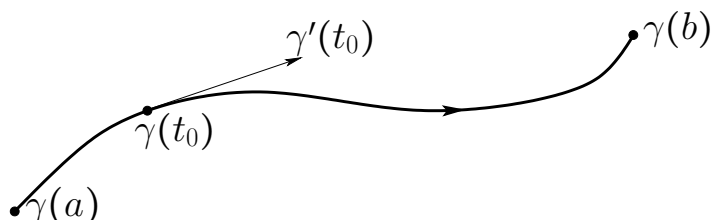


Figura 9.2: Vetor diretor de uma curva

Não é difícil mostrar que toda curva regular é localmente injetora [por favor, cheque]. Entretanto, a análise que segue prescinde de tal propriedade.

9.1 Regra da Cadeia. *Sejam $\gamma : J \rightarrow \Omega$ derivável e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Então,*

$$f \circ \gamma : J \rightarrow \mathbb{C} \text{ é derivável e } (f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t)) \gamma'(t), \text{ para todo } t \in J.$$

Prova.

Fixemos $t \in J$. Para $s \neq t$, seja $N(s)$ o quociente de Newton

$$\frac{f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))}{s - t} = \begin{cases} \frac{f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))}{\gamma(s) - \gamma(t)} \frac{\gamma(s) - \gamma(t)}{s - t} & , \text{ se } \gamma(s) - \gamma(t) \neq 0, \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Seja (s_n) uma sequência em $J \setminus \{t\}$ e convergente a t .

- ◇ Suponhamos $\gamma(s_n) = \gamma(t)$ para todo n . Então temos $N(s_n) = 0$ para todo n e, é trivial ver, $\gamma'(t) = 0$. Logo, $N(s_n) \rightarrow f'(\gamma(t))\gamma'(t)$.
- ◇ Suponhamos $\gamma(s_n) \neq \gamma(t)$ para todo n . Então, como γ é contínua, segue que $N(s_n) \rightarrow f'(\gamma(t))\gamma'(t)$ ♣

Seja (γ_1, γ_2) um par ordenado de curvas regulares que se intersectam em um ponto z_0 . Seja (t_1, t_2) um par de instantes tal que $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$. Via translações, podemos supor

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0.$$

Temos então as definições abaixo.

9.2 Definição. Seja (γ_1, γ_2) um par ordenado de curvas regulares, com $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$. O ângulo formado por tal par, em z_0 , é o formado pelo par $(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0))$.

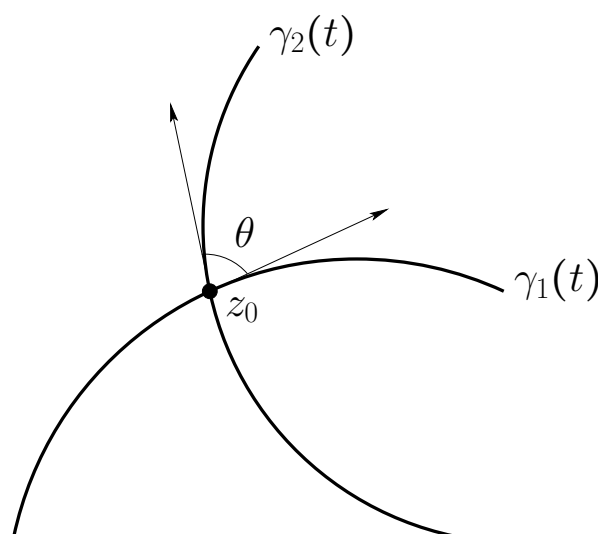


Figura 9.3: Ângulo entre duas curvas

9.3 Definição. Seja Ω aberto em \mathbb{C} . Então, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é **conforme** no ponto z_0 se f preserva os ângulos formados por pares ordenados de curvas regulares que se intersectam em z_0 .

Vejam os que se f é holomorfa em z_0 e $f'(z_0) \neq 0$, então f é conforme em z_0 . Sejam γ_1 e γ_2 curvas regulares em Ω e passando por z_0 . Devido à identidade

$$\frac{(f \circ \gamma_2)'(0) \overline{(f \circ \gamma_1)'(0)}}{|(f \circ \gamma_2)'(0)| |(f \circ \gamma_1)'(0)|} = \frac{\gamma_2'(0) \overline{\gamma_1'(0)}}{|\gamma_2'(0)| |\gamma_1'(0)|},$$

são iguais os ângulos formados por $(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2)$ em $f(z_0)$ e por (γ_1, γ_2) em z_0 .

A seguir, provamos o reverso. Notemos que a noção de aplicação conforme se estende naturalmente a funções diferenciáveis F em abertos de \mathbb{R}^2 a valores em \mathbb{R}^2 . Para tal, definimos o ângulo (orientado) formado pelo par ordenado $((a, b); (c, d))$ de vetores não nulos em \mathbb{R}^2 como o ângulo formado pelo par ordenado de números complexos $(a + bi, c + di)$ em \mathbb{C}^2 . Dizemos que F preserva ângulos (orientados) se seu diferencial preserva ângulos (orientados) entre duas curvas que se intersectam.

9.4 Teorema. *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma aplicação cujo campo associado F é diferenciável. Suponhamos que F preserva o ângulo (orientado) entre curvas regulares que se intersectam. Então, f é holomorfa e f' não se anula.*

Prova.

Fixemos $z_0 = x_0 + iy_0$ em Ω e a base canônica ordenada $\{e_1, e_2\}$ de \mathbb{R}^2 .

Com a notação $z = x + iy$, escrevemos

$$\begin{cases} f(x + iy) &= u(x, y) + iv(x, y) \text{ e} \\ F(x, y) &= (u(x, y), v(x, y)). \end{cases}$$

O campo F é diferenciável em (x_0, y_0) e seu diferencial é a aplicação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ associada à matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(x_0, y_0) & u_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & v_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Dada uma curva regular $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ com $\gamma(0) = z_0$, identificada à curva regular $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$ que satisfaz $\Gamma(0) = (x_0, y_0)$, identificamos

$$(f \circ \gamma)(t) \text{ com } (F \circ \Gamma)(t).$$

Então, existe a derivada $(f \circ \gamma)'(0) \in \mathbb{C}$ que é identificada com o vetor

$$(F \circ \Gamma)'(0) = T(\Gamma'(0)).$$

Façamos duas observações elementares.

- ◇ Temos $\det T \neq 0$. Caso contrário, $\text{Imagem}(T)$ é nula ou uni-dimensional e todos os vetores $T(\Gamma'(0))$ são paralelos entre si e F não preserva ângulos.
- ◇ Os vetores $e_1 + e_2$ e $e_1 - e_2$ são ortogonais e conseqüentemente os vetores $T(e_1) + T(e_2)$ e $T(e_1) - T(e_2)$ são ortogonais. Assim, encontramos

$$|T(e_1)| = |T(e_2)|.$$

Por definição temos

$$Te_1 = (a, b) \quad \text{e} \quad Te_2 = (c, d)$$

e então encontramos

$$(9.4.1) \quad a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

Sejam γ_1 e γ_2 curvas regulares e satisfazendo

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0, \quad \gamma_1'(0) = 1 \quad \text{e} \quad \gamma_2'(0) = i.$$

[Portanto, $\Gamma_1'(0) = e_1$ e $\Gamma_2'(0) = e_2$]. O ângulo formado pelo par ordenado de números complexos $(1, i)$ é $\pi/2 \pmod{2\pi\mathbb{Z}}$. Por hipótese, o ângulo formado pelo par ordenado de vetores

$$(T(\Gamma_1'(0)), T(\Gamma_2'(0))) = (Te_1, Te_2)$$

é também $\pi/2 \pmod{2\pi\mathbb{Z}}$. Assim, por definição temos

$$\frac{c + di}{|c + di|} = e^{i\pi/2} \left(\frac{a + bi}{|a + bi|} \right).$$

Por (9.4.1) encontramos

$$(\text{para não esquecer } \rightarrow) \quad c + di = e^{i\frac{\pi}{2}}(a + bi) = i(a + bi) = -b + ai$$

$$\text{e} \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(x_0, y_0) & u_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & v_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Pela Proposição 5.11 segue que f é holomorfa e $f'(z_0) = a + ib \neq 0$ [pois, $\det T \neq 0$]♣

Destaquemos que

$$\det T = |f'|^2 > 0.$$

Dizemos que T e f preservam orientação.

Pela Definição 9.3, comentários acima e Teorema 9.4, segue que uma função holomorfa é uma aplicação conforme se e somente se a sua derivada não se anula.

As abordagens ao estudo de aplicações conformes são um tanto variadas. Sugiro ao leitor comparar as adotadas em alguns livros. É recomendável a leitura da (famosa) exposição em Ahlfors, *Complex Analysis*, 3rd. ed., pp. 73-74.

9.2 - Automorfismos (analíticos) do disco aberto $B(0;1)$

Dois abertos conexos Ω_1 e Ω_2 são ditos **conformemente equivalentes** se existe $\varphi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ holomorfa e bijetora. No capítulo 6 (teorema 6.18, a versão global do teorema da função inversa) vimos que se tal φ é analítica então φ é isomorfismo analítico (com φ^{-1} analítica) e φ' não se anula.

Se dois abertos Ω_1 e Ω_2 são conformemente equivalentes e $\varphi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ é como acima, então a aplicação

$$f \mapsto \Phi(f) = f \circ \varphi$$

é uma bijeção de $\mathcal{H}(\Omega_2)$ em $\mathcal{H}(\Omega_1)$ que preserva somas e produtos. Isto é, Φ é um isomorfismo de anéis. Desta forma, problemas sobre $\mathcal{H}(\Omega_2)$ podem ser transferidos a $\mathcal{H}(\Omega_1)$ e as soluções transferidas de volta a $\mathcal{H}(\Omega_2)$. A situação mais importante conduz ao **Teorema da Aplicação de Riemann**, que reduz o estudo do anel $\mathcal{H}(\Omega)$, onde Ω é um aberto simplesmente conexo distinto do plano, ao estudo do anel $\mathcal{H}(B(0;1))$. No caso de problemas específicos, é necessário conhecer o isomorfismo φ .

9.5 Lema. *Seja $a \in B(0;1)$. Então, a aplicação*

$$\phi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z},$$

é um automorfismo (analítico) de $B(0;1)$, com inversa ϕ_{-a} . Ainda, a aplicação ϕ_a é analítica em $D(0;1)$ e $\phi_a(S^1) = S^1$.

Prova.

A função ϕ_a é não constante e analítica em $B(0;|a|^{-1}) \supset D(0;1)$ [pois, $|a|^{-1} > 1$]. Pelo teorema da aplicação aberta, $\phi_a(B(0;1))$ é aberto.

Se $|z| = 1$, temos $z\bar{z} = 1$ e

$$|\phi_a(z)| = \left| \frac{z - a}{z(\bar{z} - \bar{a})} \right| = \left| \frac{z - a}{\bar{z} - \bar{a}} \right| = 1.$$

Então, pelo princípio do módulo máximo segue $\phi_a : B(0;1) \rightarrow B(0;1)$. Analogamente, $\phi_{-a} : B(0;1) \rightarrow B(0;1)$.

Ainda, dado z em $B(0; 1)$ temos

$$\begin{aligned}\phi_a \circ \phi_{-a}(z) &= \frac{\phi_{-a}(z) - a}{1 - \bar{a}\phi_{-a}(z)} \\ &= \frac{\frac{z+a}{1+\bar{a}z} - a}{1 - \bar{a}\frac{z+a}{1+\bar{a}z}} \\ &= \frac{z + a - a - |a|^2 z}{1 + \bar{a}z - \bar{a}z - |a|^2} \\ &= z.\end{aligned}$$

Da mesma forma, $\phi_{-a} \circ \phi_a$ também é a identidade de $B(0; 1)$ ♣

9.6 Teorema. *A função $f \in \mathcal{A}(B(0; 1))$ é um automorfismo (analítico) de $B(0; 1)$ se e somente se existem θ em \mathbb{R} e um ponto a em $B(0; 1)$ tais que*

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} = e^{i\theta} \phi_a(z), \text{ para todo } z \in B(0; 1).$$

Prova. Esta prova usa, essencialmente, o Lema de Schwarz (6.16).

(\Leftarrow) Pelo Lema 9.5 a função $z \mapsto e^{i\theta} \phi_a(z)$ é automorfismo (analítico) de $B(0; 1)$.

(\Rightarrow) Seja $b = f(0)$. Então, $F = \phi_b \circ f$ é automorfismo (analítico) de $B(0; 1)$ e $F(0) = 0$. Pelo lema de Schwarz,

$$|F(z)| \leq |z|, \text{ para todo } z \text{ em } B(0; 1).$$

Donde, F^{-1} é automorfismo de $B(0; 1)$ e $F^{-1}(0) = 0$. Pelo lema de Schwarz,

$$|F^{-1}(z)| \leq |z|, \text{ para todo } z \text{ em } B(0; 1).$$

Obtemos então $|F(z)| = |z|$, para todo $z \in B(0; 1)$, e concluímos que existe uma constante θ tal que $F(z) = e^{i\theta} z$, para todo $z \in B(0; 1)$. Assim,

$$f(z) = \phi_{-b} \circ F(z) = \frac{e^{i\theta} z + b}{1 + \bar{b}e^{i\theta} z} = \frac{e^{i\theta}(z + be^{-i\theta})}{1 + \bar{b}e^{-i\theta} z} = e^{i\theta} \phi_{-be^{-i\theta}}(z) \clubsuit$$

9.3 - Teorema da Aplicação de Riemann

É claro que todo aberto conformemente equivalente à bola $B(0; 1)$ é simplesmente conexo. O reverso foi formulado por G. F. B. Riemann em 1851 e provado em sua generalidade no início do século XX. A prova de Riemann, baseada em teoria do potencial (funções harmônicas) continha uma falha crucial e em parte corrigida por Hilbert (1905). Essencialmente, a ferramenta que faltava para uma prova completa do teorema da aplicação de Riemann era o Critério de Compacidade de Montel, ou um substituto.

Segundo alguns, a primeira prova correta (e que não atraiu muita atenção) do teorema da aplicação de Riemann foi dada em 1900, por W. F. Osgood. Segundo outros, em 1907 por K. Koebe. Poincaré, em 1908 também publicou uma prova de tal teorema. Os métodos então desenvolvidos por Koebe e Carathéodory (1912) evoluíram para uma prova cristalina e elegante que, em seu formato final, se deve a L. Fejér e F. Riesz (1922). Em essência, esta é a prova apresentada nesta notas.

Vide Gray, Jeremy (1994), *On the history of the Riemann mapping theorem*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Supplemento (34): 47-94.

Para estudarmos o teorema da aplicação de Riemann, excluimos o caso $\Omega = \mathbb{C}$ pois, pelo Teorema de Liouville, toda função analítica

$$\varphi : \mathbb{C} \rightarrow B(0; 1)$$

é constante.

Veremos o teorema da aplicação de Riemann como um corolário do Teorema 9.8, a seguir. Esta versão (teorema 9.8) aparentemente mais forte do teorema de Riemann será útil (no capítulo 12) para caracterizarmos abertos simplesmente conexos.

O Teorema 9.8 isola a propriedade essencial à prova do teorema de Riemann: a existência de raiz quadrada para funções $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ que não se anulam [vide Teorema 8.8(b)]. Na prova do teorema 9.8, usamos a aplicação de Koebe.

9.7 Lema (Koebe). *Seja Ω um aberto conexo tal que*

$$0 \in \Omega \subset B(0;1), \text{ com } \Omega \neq B(0;1).$$

Suponhamos que existe uma \sqrt{f} , analítica em Ω , para toda $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ que não se anula em Ω . Então, existe uma aplicação $\kappa \in \mathcal{A}(\Omega)$ com as seguintes propriedades.

- (a) $\kappa(0) = 0$ e $\kappa(\Omega) \subset B(0;1)$.
- (b) $\kappa : \Omega \rightarrow B(0;1)$ é injetora.
- (c) $|\kappa(z)| > |z|$, para todo $z \in \Omega \setminus \{0\}$.

Prova.

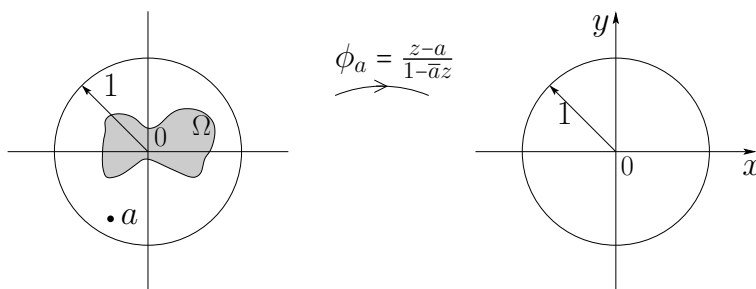


Figura 9.4: A transformação ϕ_a e o Lema de Koebe

◇ **Preparação.** [Vide Figura 9.4].

Sejam $a \in B(0;1) \setminus \Omega$ e

$$\phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \text{ onde } z \in \Omega.$$

Pelo Teorema 9.6 temos $\phi_a : \Omega \rightarrow B(0;1)$, com ϕ_a analítica, injetora e $\phi_a(z) \neq 0$ para todo z em Ω . Por hipótese, existe

$$g \in \mathcal{A}(\Omega) \text{ tal que } g^2 = \phi_a.$$

É claro que $g(\Omega) \subset B(0;1)$. Ainda, a função g é injetora [de fato, se $g(z) = g(w)$ então temos $\phi_a(z) = g^2(z) = g^2(w) = \phi_a(w)$ e em consequência $z = w$].

Definamos

$$b = g(0) \text{ e } \psi(z) = \phi_b(z) = \frac{z-b}{1-\bar{b}z}, \text{ para } z \in B(0;1), \text{ e}$$

$$\kappa = \psi \circ g \in \mathcal{A}(\Omega).$$

A seguir, completamos as provas das afirmações (a), (b) e (c).

(a) e (b). É trivial ver que

$$\kappa(0) = 0, \quad \kappa(\Omega) \subset B(0; 1) \quad \text{e que} \quad \kappa \text{ é injetora,}$$

pois g e ψ são injetoras.

(c) Pelo teorema 6.18 da função inversa (global), as aplicações

$$g : \Omega \rightarrow g(\Omega) \quad \text{e} \quad \psi : g(\Omega) \rightarrow \psi(g(\Omega)) = \kappa(\Omega)$$

são isomorfismos (analíticos) entre abertos e

$$\kappa^{-1} = g^{-1} \circ \psi^{-1} : \kappa(\Omega) \rightarrow \Omega \quad \text{é isomorfismo (analítico).}$$

Notemos que $\phi_a^{-1} = \phi_{-a}$. A bijeção $r(z) = g \circ \phi_{-a}(z)$, para $z \in \phi_a(\Omega)$ [logo, $\phi_{-a}(z) \in \Omega$], satisfaz

$$r(z)^2 = g^2(\phi_{-a}(z)) = \phi_a \circ \phi_{-a}(z) = z$$

e é uma raiz quadrada analítica. Onde encontramos

$$r^{-1}(w) = [r(r^{-1}(w))]^2 = w^2.$$

Seguem as identidades

$$g^{-1}(z) = (\phi_{-a} \circ r^{-1})(z) = \phi_{-a}(z^2) = \frac{z^2 + a}{1 + \bar{a}z^2}.$$

Desta forma, a função

$$\kappa^{-1} = g^{-1} \circ \psi^{-1} : \kappa(\Omega) \rightarrow \Omega$$

é a restrição de uma função analítica

$$K : B(0; 1) \rightarrow B(0; 1)$$

que não é uma rotação [não é da forma $z \mapsto \omega z$, com $\omega \in S^1$].

Temos

$$\psi(b) = \phi_b(b) = 0 \text{ e } g(0) = b.$$

Donde, $K(0) = g^{-1}(b) = 0$. Então, pelo Lema de Schwarz [e já que K não é uma rotação] obtemos

$$|K(z)| < |z|, \text{ para todo } z \in B(0;1) \setminus \{0\}.$$

Logo, temos $|\kappa^{-1}(z)| < |z|$ se $z \in \kappa(\Omega) \setminus \{0\}$.

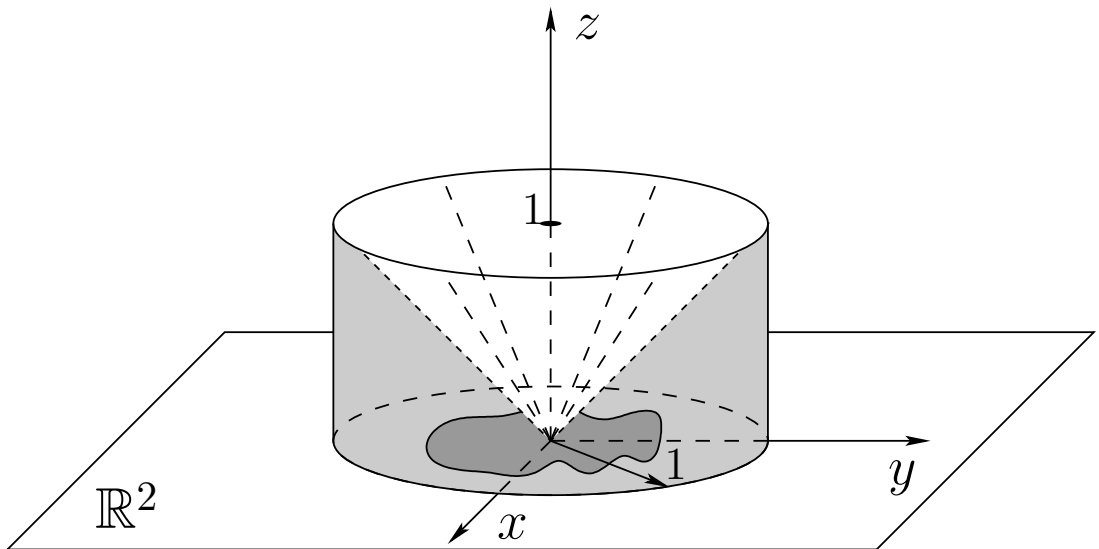


Figura 9.5: A paisagem analítica da aplicação de Koebe $[\kappa]$ está no cone branco

Então, para $z = \kappa(w)$ e $w \neq 0$,

$$|w| = |\kappa^{-1} \circ \kappa(w)| < |\kappa(w)| \clubsuit$$

9.8 Teorema. *Seja Ω aberto, conexo e $\Omega \neq \mathbb{C}$. Suponha que para toda função $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, que não se anula em Ω , existe $g \in \mathcal{A}(\Omega)$ tal que $g^2 = f$. Então, existe um isomorfismo (analítico) entre Ω e $B(0;1)$.*

Prova. Dividamos a prova em três partes.

- ◇ Existe um isomorfismo analítico $h_0 : \Omega \rightarrow \Omega_0$, onde Ω_0 é aberto e conexo e $0 \in \Omega_0 \subset B(0;1)$. Seja $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Por hipótese, existe $g \in \mathcal{A}(\Omega)$ tal que $g^2(z) = z - a$, para todo z em Ω . Claramente g é injetora. Se $w \in g(\Omega)$, então $-w \notin g(\Omega)$ [caso contrário, se $g(z_1) = w = -g(z_2)$ então $z_1 - a = g(z_1)^2 = g(z_2)^2 = z_2 - a$ e obtemos $z_1 = z_2$ e $w = -w$; logo, $w = 0$ e g se anula em Ω].
Sejam $w_0 \in g(\Omega)$ e $B(w_0; r) \subset g(\Omega)$, com $r > 0$. Então, $g(\Omega) \cap B(-w_0; r) = \emptyset$ [pois, se $z \in B(-w_0; r)$ então $-z \in B(w_0; r)$]. Isto mostra $|g(z) + w_0| \geq r$, para todo z em Ω . Logo, $h = 1/(g + w_0) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é analítica, injetora e $|h| \leq 1/r$. Pelo teorema da função inversa, $h : \Omega \rightarrow h(\Omega)$ é isomorfismo (analítico).
Seja

$$h_0(z) = \epsilon[h(z) - h(z_0)], \text{ onde } z_0 \in \Omega \text{ e } 0 < \epsilon < \frac{r}{2}.$$

A função $h_0 : \Omega \rightarrow \Omega_0 = h_0(\Omega)$ é isomorfismo (analítico) e $0 \in \Omega_0 \subset B(0;1)$ [pois $h_0(z_0) = 0$ e $|h_0(z)| \leq \epsilon|h(z)| + \epsilon|h(z_0)| < 1/2 + 1/2 = 1$].

- ◇ Para toda função $f \in \mathcal{A}(\Omega_0)$, que não se anula, existe uma função $\sqrt{f} \in \mathcal{A}(\Omega_0)$. De fato, dada $\phi \in \mathcal{A}(\Omega)$ tal que $\phi^2 = f \circ h_0$, temos $(\phi \circ h_0^{-1})^2 = f$.
- ◇ Seja \mathcal{F} a família das funções $f \in \mathcal{A}(\Omega_0)$ satisfazendo

- (i) $f(\Omega_0) \subset B(0;1)$.
- (ii) $f : \Omega_0 \rightarrow B(0;1)$ é injetora.
- (iii) $f(0) = 0$.

Tal família é não vazia pois contém a função $f(z) = z$, onde $z \in \Omega_0$. Fixemos um ponto arbitrário $z_0 \in \Omega_0$, com $z_0 \neq 0$. É trivial ver que

$$\alpha = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(z_0)| \text{ satisfaz } 0 < \alpha \leq 1.$$

As afirmações abaixo mostram que Ω_0 é isomorfo (analiticamente) a $B(0; 1)$.

- (a) Existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $|F(z_0)| = \alpha$.
- (b) $F : \Omega_0 \rightarrow B(0; 1)$ é isomorfismo (analítico).

Prova de (a).

Seja (f_n) uma sequência em \mathcal{F} tal que $|f_n(z_0)| \rightarrow \alpha$. Como temos $|f_n(z)| < 1$ para todo $z \in \Omega_0$, pelo teorema de Montel existe uma subsequência (f_{n_k}) convergindo uniformemente nos compactos de Ω_0 a uma função $F \in \mathcal{A}(\Omega_0)$. É claro que $F(0) = 0$ e $|F(z_0)| = \alpha$. Em particular, F não é constante. Pelo Corolário 6.23 (Hurwitz) a função F é injetora. É claro que $F(\Omega_0) \subset D(0; 1)$ e então, como $F(\Omega_0)$ é aberto, segue que $F(\Omega_0) \subset B(0; 1)$. Em suma,

$$F \in \mathcal{F} \text{ e } |F(z_0)| = \alpha.$$

Prova de (b).

Seja $\Omega_1 = F(\Omega_0) \subset B(0; 1)$. Como $F : \Omega_0 \rightarrow \Omega_1$ é isomorfismo (analítico), basta provar que $\Omega_1 = B(0; 1)$. Suponhamos, por contradição, que $\Omega_1 \neq B(0; 1)$. Então, pela segunda parte da prova deste teorema e pelo Lema 9.7 (Koebe) existe uma função $\kappa \in \mathcal{A}(\Omega_1)$ tal que $\kappa(0) = 0$, com $\kappa : \Omega_1 \rightarrow B(0; 1)$ injetora e $|\kappa(w)| > |w|$ em todo ponto $w \in \Omega_1 \setminus \{0\}$. Donde segue

$$f = \kappa \circ F \in \mathcal{F} \text{ e também } |f(z_0)| > |F(z_0)| = \alpha \nabla$$

9.9 Teorema da Aplicação de Riemann. *Seja Ω um aberto simplesmente conexo que não o plano. Então, Ω é conformemente equivalente a $B(0; 1)$.*

Prova.

Pelo Teorema 8.8(b) toda função analítica em Ω , que não se anula, tem raiz quadrada analítica. Então, pelo Teorema 9.8 segue que Ω é isomorfo (analiticamente) a $B(0; 1)$ e, portanto, conformemente equivalente a $B(0; 1)$ ♣

9.4 - Esfera de Riemann

Para analisar uma função $f = f(z)$ no infinito é frutífero estudar $z \mapsto f(1/z)$ em uma vizinhança de 0. Torna-se então razoável tratar “o infinito” como mais um ponto. Vejamos algumas maneiras, equivalentes, de proceder.

Consideremos \mathbb{C} com sua topologia usual e um elemento $\infty \notin \mathbb{C}$.

O espaço \mathbb{P}^1 .

Consideremos o conjunto $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Um subconjunto O de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ é aberto se

- (1) $O \cap \mathbb{C}$ é aberto em \mathbb{C} e
 - (2) se $\infty \in O$ então, para algum $r > 0$, o conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$ está contido em O .
- Assim, escolhemos como sistema fundamental de vizinhanças de ∞ os conjuntos

$$B(\infty; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \cup \{\infty\}, \text{ onde } r > 0.$$

Notemos que os conjuntos

$$D(\infty; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq r\} \cup \{\infty\}$$

são vizinhanças compactas de ∞ [por favor, cheque].

Com as notações

$$\frac{1}{\infty} = 0 \text{ e } \frac{1}{0} = \infty,$$

segue que O é aberto em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se e somente se

$$\left\{ \frac{1}{z} : z \in O \right\}$$

é aberto em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Portanto, a função bijetora

$$\text{Inv} : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \text{ onde } \text{Inv}(z) = \frac{1}{z} \text{ para cada } z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

é um homeomorfismo.

Consideremos agora os seguintes abertos de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$,

$$O_1 = \mathbb{C} \text{ e } O_2 = (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}.$$

Notemos $O_1 \cup O_2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ e $O_1 \cap O_2 = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Consideremos as aplicações

$$\phi_1 : O_1 \rightarrow \mathbb{C}, \text{ onde } \phi_1(z) = z \text{ para cada } z \in O_1, \text{ e}$$

$$\phi_2 : O_2 \rightarrow \mathbb{C}, \text{ onde } \phi_2(z) = \frac{1}{z} \text{ para cada } z \in O_2.$$

Então, ϕ_1 e ϕ_2 são homeomorfismos e a aplicação

$$\phi_1 \circ \phi_2^{-1} : \phi_2(O_1 \cap O_2) \rightarrow \phi_1(O_1 \cap O_2)$$

é a bijeção

$$z \mapsto \frac{1}{z} \text{ de } \mathbb{C}^* \text{ em } \mathbb{C}^*.$$

O conjunto $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ com esta estrutura complexa [isto é, a topologia e as cartas ϕ_1 e ϕ_2] é a **reta projetiva complexa**, denotada \mathbb{P}^1 .

Uma função $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ é **holomorfa** se as seguintes aplicações são holomorfas:

$$f \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ e } f \circ \phi_2^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}.$$

A construção de Riemann.

Consideremos a esfera unitária de \mathbb{R}^3 centrada na origem

$$S^2 = \{p = (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\},$$

com a métrica induzida por \mathbb{R}^3 .

Claramente, a esfera S^2 é compacta, conexa por caminhos e conexa.

Na construção de Riemann, o ponto ∞ de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ é identificado com o “polo” $(0, 0, 1)$ [mas, poderia ser qualquer outro ponto e tal observação é importante]. Vide figura 9.6, a seguir.

A topologia em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ é a induzida pela projeção estereográfica

$$\Phi : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{C}$$

definida por: $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$ é o único ponto $z = x + iy$ em \mathbb{C} tal que a reta em \mathbb{R}^3 e pelos pontos $(0, 0, 1)$ e $(x, y, 0)$ intersecta $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ no ponto $p = (\xi, \eta, \zeta)$.

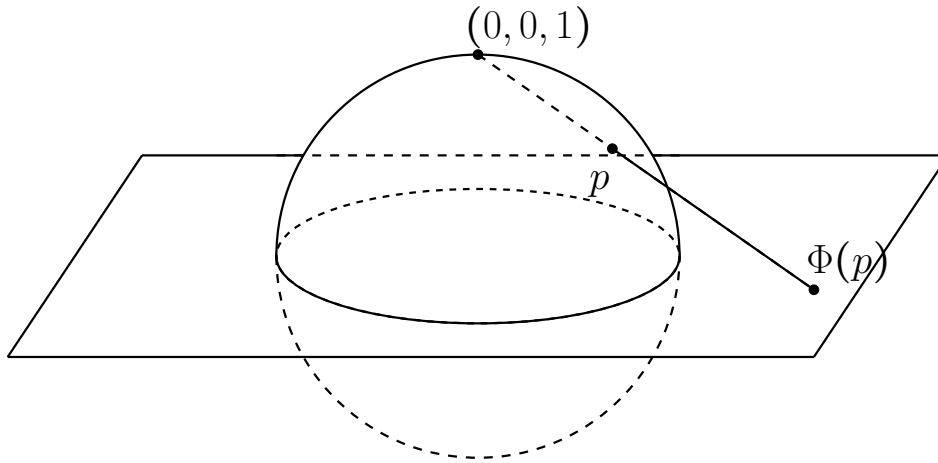


Figura 9.6: Projeção estereográfica

A projeção estereográfica é bijetora e [por favor, cheque]

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta} = z = x + iy \quad \text{e} \quad \Phi^{-1}(z) = \left(\frac{2x}{1 + |z|^2}, \frac{2y}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) = (\xi, \eta, \zeta).$$

Evidentemente, $\Phi : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{C}$ é um homeomorfismo. Ainda,

$$|\Phi(\xi, \eta, \zeta)|^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1 - \zeta)^2} = \frac{1 - \zeta^2}{(1 - \zeta)^2} = \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} \xrightarrow{(\xi, \eta, \zeta) \rightarrow (0, 0, 1)} \infty \quad \text{e} \quad \Phi^{-1}(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} (0, 0, 1).$$

Através de Φ , identificamos \mathbb{C} com $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ e definindo $\Phi(0, 0, 1) = \infty$ identificamos o chamado plano complexo estendido $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ com a esfera S^2 .

Os abertos de \mathbb{P}^1 e $\overline{\mathbb{C}}$ são os mesmos. Portanto S^2 , $\overline{\mathbb{C}}$ e \mathbb{P}^1 são homeomorfos.

Tanto S^2 como \mathbb{P}^1 e $\overline{\mathbb{C}}$ são denominadas esferas de Riemann.

Mantenhamos as notações acima para S^2 e a projeção estereográfica Φ .

9.10 Teorema. *Seja Γ um subconjunto não vazio e não unitário de S^2 . Então, Γ é uma circunferência [isto é, a intersecção de S^2 com um plano $\pi : a\xi + b\eta + c\zeta = d$, onde a, b, c e d são constantes reais e (a, b, c) é um vetor não nulo] se e somente se sua projeção estereográfica $\Phi(\Gamma)$ no plano cartesiano é*

- uma reta se $(0, 0, 1) \in \Gamma$
- uma circunferência (não degenerada) se $(0, 0, 1) \notin \Gamma$.

Prova. As coordenadas (ξ, η, ζ) , em S^2 , e (x, y) no plano \mathbb{R}^2 satisfazem

$$\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2} \right) = (\xi, \eta, \zeta).$$

Γ é a circunferência citado se e só se as coordenadas (x, y) de $\Phi(\Gamma)$ satisfazem $2ax + 2by + c(x^2 + y^2 - 1) = d(x^2 + y^2 + 1)$ ou, ainda, $(c-d)(x^2 + y^2) + 2ax + 2by + (-c-d) = 0$, cujas possíveis soluções são (em tese): o vazio, um ponto, uma reta ou um círculo.

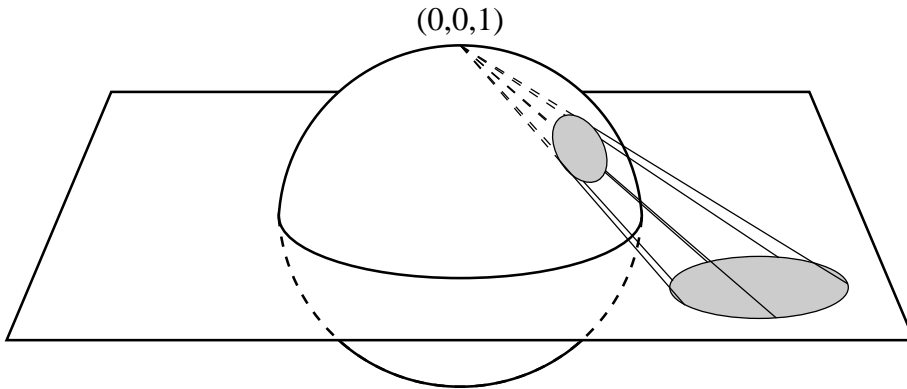


Figura 9.7: Ilustração ao Teorema 9.10

(\Rightarrow) Devido às hipóteses, Γ é uma circunferência não degenerada em S^2 .

Se Γ contém $(0, 0, 1)$, então $c = d$ e a projeção é uma reta.

Se Γ não contém $(0, 0, 1)$, então $c \neq d$ e a projeção é uma circunferência.

(\Leftarrow) Por hipótese, a projeção de Γ é uma reta ou uma circunferência (não degenerada). As coordenadas de tal projeção satisfazem uma equação do tipo

$$(c-d)(x^2 + y^2) + 2ax + 2by + (-c-d) = 0, \quad \text{com } (c-d)^2 + a^2 + b^2 \neq 0.$$

Donde segue que as coordenadas (ξ, η, ζ) de Γ satisfazem $a\xi + b\eta + c\zeta = d$.

Por fim, temos $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Caso contrário, segue $a = b = c = 0$ e $d \neq 0$ e então a equação para a projeção é $x^2 + y^2 + 1 = 0$, cuja solução é o vazio.

9.5 - Simplesmente Conexos e a Esfera de Riemann

Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que X é:

- localmente compacto se cada ponto de X tem uma vizinhança compacta;
- localmente conexo se cada ponto de X tem um sistema fundamental de vizinhanças abertas e conexas.

9.11 Lema. *Seja (X, d) um espaço métrico localmente compacto. Seja K uma componente (conexa) compacta de X . Então, existe um sistema fundamental de vizinhanças de K que são abertas e fechadas em X .*

Prova.

◇ O caso X compacto. Consideremos a família

$$\mathcal{V} = \{V \subset X : \text{o conjunto } V \text{ é aberto e fechado em } X \text{ e, ainda, contém } K\}.$$

Temos $\mathcal{V} \neq \emptyset$, pois $X \in \mathcal{V}$. Seja

$$L = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} V.$$

Obviamente, $K \subset L$. Ainda, L é uma intersecção de fechados em X . Logo, L é fechado em X . Como X é compacto, segue que L é compacto. Assim,

$$K \subset L \text{ e } L \text{ é compacto em } X.$$

Mostremos que \mathcal{V} é um sistema fundamental de vizinhanças de L .

Seja O um aberto em X tal que $L \subset O$. Temos,

$$X \setminus O \subset X \setminus L.$$

Como $X \setminus O$ é compacto [um fechado no compacto X] e valem as relações

$$X \setminus O \subset X \setminus L = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} (X \setminus V),$$

segue que existem V_1, \dots, V_n em \mathcal{V} tais que $X \setminus O \subset (X \setminus V_1) \cup \dots \cup (X \setminus V_n)$.

Passando ao complementar, segue

$$V_1 \cap \dots \cap V_n \subset O, \text{ com } L \subset V_1 \cap \dots \cap V_n \text{ e } V_1 \cap \dots \cap V_n \in \mathcal{V}.$$

Isto mostra que \mathcal{V} é um sistema fundamental de vizinhanças de L .

Para encerrar tal caso, mostremos que $L = K$.

Basta vermos que L é conexo, já que K é uma componente conexa e $K \subset L$. Supondo por contradição que L não é conexo, consideremos uma cisão

$$(9.11.1) \quad L = A \cup B.$$

Isto é, A e B são abertos e fechados em L , não vazios e disjuntos. Em particular, A e B são fechados em X [pois L é fechado em X]. Temos

$$K = (A \cap K) \cup (B \cap K), \text{ com } A \cap K \text{ e } B \cap K \text{ abertos e fechados em } K.$$

Como K é conexo, temos $K \subset A$ ou $K \subset B$. Suponhamos $K \subset A$.

Como A e B são fechados disjuntos no compacto K , então A e B são compactos disjuntos. Logo, existem dois abertos disjuntos O_A e O_B satisfazendo

$$A \subset O_A \text{ e } B \subset O_B.$$

Claramente, $L \subset O_A \cup O_B$. Já vimos que existe $V \in \mathcal{V}$ satisfazendo

$$L \subset V \subset O_A \cup O_B.$$

O conjunto $V \cap O_A$ é aberto em X [pois V e O_A são abertos em X]. Analogamente, $V \cap O_A = V \cap (X \setminus O_B)$ é fechado em X . Claramente $K \subset V \cap O_A$ [pois, $K \subset L \subset V$ e $K \subset A \subset O_A$]. Portanto, $V \cap O_A \in \mathcal{V}$. Segue então que

$$L \subset V \cap O_A = V \cap (X \setminus O_B).$$

Donde segue $L \cap O_B = \emptyset$ e $L \cap B = \emptyset$. Logo, devido a (9.11.1) temos $B = \emptyset$.

- ◇ **O caso geral.** Seja X_0 uma vizinhança compacta de K [cheque a existência]. Destaquemos que K é uma componente conexa de X_0 [pois conexidade é uma noção absoluta e assim, K é conexo em X_0 ; ainda mais, se C é um conexo de X_0 tal que $K \subset C$ então C é conexo de X e portanto $C = K$].

Seja O_1 um aberto arbitrário em X e tal que

$$K \subset O_1.$$

Então, $O_1 \cap X_0$ é uma vizinhança em X do conjunto K . Portanto, existe um aberto O_2 em X tal que

$$K \subset O_2 \subset O_1 \cap X_0 \subset X_0.$$

Assim, $O_2 \cap X_0$ é aberto em X_0 . Pelo caso compacto (já provado), existe um conjunto V , aberto e fechado na topologia de X_0 , tal que

$$K \subset V \subset O_2 \cap X_0.$$

Como X_0 é fechado em X , segue que V é fechado em X . Ainda mais, já que V é aberto em X_0 e $V \subset O_2 \cap X_0$, segue que

$$V = V \cap O_2$$

é aberto em O_2 . Desta forma temos

$$V \subset O_2 \subset X, \text{ com } V \text{ aberto em } O_2 \text{ e } O_2 \text{ aberto em } X.$$

Logo, V é aberto em X .

Portanto, V é aberto e fechado em X e satisfaz $K \subset V \subset O_1$ ♣

No Capítulo 12 veremos a equivalência das propriedades na proposição abaixo.

9.12 Proposição. *Seja Ω um aberto conexo no plano \mathbb{C} . Quanto às afirmações a seguir, temos que (a) implica (b) e (b) implica (c).*

(a) Ω é simplesmente conexo.

(b) $S^2 \setminus \Omega$ é conexo. [Com a identificação $S^2 \equiv \mathbb{C} \cup \{\infty\}$].

(c) $\mathbb{C} \setminus \Omega$ não tem componente (conexa) compacta.

Prova. As componentes aqui citadas são todas conexas.

(a) \Rightarrow (b). Se $\Omega = \mathbb{C}$, é óbvio que $S^2 \setminus \Omega = \{\infty\}$ é conexo.

Suponhamos $\Omega \neq \mathbb{C}$. Pelo Teorema da aplicação de Riemann existe

$$\phi: B(0; 1) \rightarrow \Omega, \text{ um homeomorfismo.}$$

Seja

$$K = \overline{\Omega} \setminus \Omega,$$

a fronteira de Ω como subconjunto aberto em S^2 [$\overline{\Omega}$ é o fecho de Ω em S^2].

Como S^2 é compacto e K é um fechado de S^2 , temos que K é compacto.

Consideremos os anéis $A_n = \{z \in \mathbb{C} : 1 - \frac{1}{n} < |z| < 1\}$

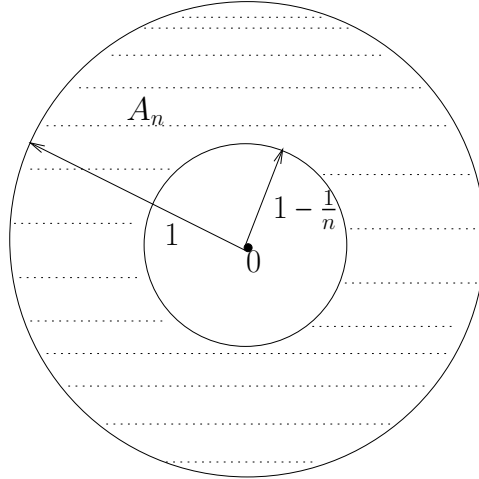


Figura 9.8: Anéis decrescentes: $A_1 = B(0; 1) \setminus \{0\} \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$

e, para cada n , o conjunto

$$K_n = \overline{\phi(A_n)}, \text{ o fecho de } \phi(A_n) \text{ em } S^2.$$

Como A_n é conexo e S^2 é compacto, K_n é conexo [vide Proposição 2.47(e)] e compacto. Ainda, $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$. Seja

$$L = \bigcap_{n \geq 1} K_n.$$

◊ **Afirmção:** $L = K$.

Basta provarmos que $p \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$ se e somente se $p \in \overline{\phi(A_n)}$ para todo n .

- Seja $p \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$. Então, existe uma sequência $(z_n) \subset B(0; 1)$ tal que $\lim \phi(z_n) = p$. Como (z_n) é limitada, então existe uma subsequência $(z_{n_k}) = (\zeta_k)$ tal que $\lim \zeta_k = \zeta \in D(0; 1)$. Se $\zeta \in B(0; 1)$, então $\phi(\zeta) = \lim \phi(\zeta_k) = \lim \phi(z_{n_k}) = p$ e então $p \in \Omega$. Portanto,

$$|\zeta_n| \rightarrow 1 \text{ e } \lim \phi(\zeta_n) = p.$$

Seja O um aberto contendo p . Então, existe n_0 tal que $\phi(\zeta_n) \in O$, para todo $n \geq n_0$. Seja N arbitrário em \mathbb{N} . Então, existe j tal que

$$j \geq n_0 \text{ e } 1 - \frac{1}{N} < |\zeta_j| < 1.$$

Logo, $\zeta_j \in A_N$ e, ainda, $\phi(\zeta_j) \in O$. Portanto, $p \in \overline{\phi(A_N)}$.

- Seja p tal que $p \in \overline{\phi(A_n)}$, para todo n em \mathbb{N} . Evidentemente, $p \in \overline{\Omega}$. Ainda mais, toda bola aberta centrada em p intersecta $\phi(A_n)$, para todo n . Portanto, existe uma sequência (z_n) tal que

$$z_n \in A_n, \text{ para todo } n, \text{ e } \lim \phi(z_n) = p.$$

É trivial ver que $|z_n| \rightarrow 1$ [vide figura 9.8].

Mostremos, por contradição, que $p \notin \Omega$. Suponhamos que existe $z \in B(0; 1)$ tal que $\phi(z) = p$. Então, $\phi(z_n) \rightarrow \phi(z)$ e, como ϕ é homeomorfismo, concluímos que (z_n) converge a $z \in B(0; 1) \not\subseteq$

Mostramos então que $p \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$, como desejávamos.

- ◇ $K = L$ é conexo. Suponhamos que exista uma cisão $K = A \cup B$ para o compacto K . Então, A e B são compactos disjuntos e não vazios. Sejam U e V abertos disjuntos em S^2 com $A \subset U$ e $B \subset V$. Visto que $[S^2 \setminus (U \cup V)] \cap K = \emptyset$, que $S^2 \setminus (U \cup V)$ é compacto e que $K = \bigcap K_n$, concluímos que temos $[S^2 \setminus (U \cup V)] \subset (S^2 \setminus K) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (S^2 \setminus K_n)$ e

$$[S^2 \setminus (U \cup V)] \cap \bigcap_{n=1}^m K_n = \emptyset, \text{ para algum } m.$$

Logo, $K_m \subset U \cup V$. Porém, $K_m \cap U \supset A$, $K_m \cap V \supset B$ e K_m é conexo $\not\subseteq$

- ◇ $S^2 \setminus \Omega$ é conexo. Suponhamos existir uma cisão

$$S^2 \setminus \Omega = T_1 \cup T_2.$$

Como $S^2 \setminus \Omega$ é compacto, T_1 e T_2 são compactos disjuntos e não vazios. Vejamos que toda componente \mathcal{C} de $S^2 \setminus \Omega$ intersecta $K = \overline{\Omega} \setminus \Omega$. Notemos que

$$\mathcal{C} \cap K = \mathcal{C} \cap \overline{\Omega}.$$

Suponhamos $\mathcal{C} \cap \overline{\Omega} = \emptyset$. Então, como S^2 é localmente conexo, todo ponto de \mathcal{C} tem uma vizinhança aberta conexa que não intersecta $\overline{\Omega}$ e portanto \mathcal{C} é aberta em S^2 . Pela Proposição 2.47(f), a componente \mathcal{C} é fechada no fechado $S^2 \setminus \Omega$. Logo, \mathcal{C} é fechada em S^2 . Pela conexidade de S^2 segue $\mathcal{C} = S^2 \not\subseteq$

Assim, temos $\mathcal{C} \cap K \neq \emptyset$ para toda componente \mathcal{C} de $S^2 \setminus \Omega$. Como T_1 e T_2 são abertos e fechados em $S^2 \setminus \Omega$ segue que T_1 e T_2 são uniões de componentes de $S^2 \setminus \Omega$. Donde segue

$$T_1 \cap K \neq \emptyset \text{ e } T_2 \cap K \neq \emptyset.$$

Logo,

$$K = (T_1 \cap K) \cup (T_2 \cap K)$$

é uma cisão para K . Isto é, K é desconexo!

(b) \Rightarrow (c). Suponhamos, por contradição, que $\mathbb{C} \setminus \Omega$ tem uma componente compacta \mathcal{C} não vazia. Seja O um aberto em $\mathbb{C} \setminus \Omega$, e limitado, satisfazendo

$$\mathcal{C} \subset O \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$$

[por exemplo, $O = B(0; r) \cap (\mathbb{C} \setminus \Omega)$ com r grande o suficiente].

Como $\mathbb{C} \setminus \Omega$ é fechado no localmente compacto \mathbb{C} , então $\mathbb{C} \setminus \Omega$ é localmente compacto. Pelo Lema (9.11), existe uma vizinhança V de \mathcal{C} , em $\mathbb{C} \setminus \Omega$, que é aberta e fechada em $\mathbb{C} \setminus \Omega$ e

$$\mathcal{C} \subset V \subset O \subset \mathbb{C} \setminus \Omega.$$

Logo, V é limitada. Como V é fechada no fechado $\mathbb{C} \setminus \Omega$, segue que V é fechada em \mathbb{C} . Portanto, V é compacta.

Observemos que

$$\mathbb{C} \setminus \Omega = (S^2 \setminus \{\infty\}) \cap (S^2 \setminus \Omega) \text{ é aberto em } S^2 \setminus \Omega.$$

Então, como V é aberta em $\mathbb{C} \setminus \Omega$ e este é aberto em $S^2 \setminus \Omega$, concluímos que V é aberta em $S^2 \setminus \Omega$. Ainda, por ser compacta, V é fechada em $S^2 \setminus \Omega$.

Como V é aberta e fechada em $S^2 \setminus \Omega$, temos

$$V = \emptyset \text{ ou } V = S^2 \setminus \Omega.$$

A primeira possibilidade é absurda pois V contém $\mathcal{C} \neq \emptyset$. A segunda também é absurda, pois $V \subset \mathbb{C}$ ao passo que o ponto ∞ pertence a $S^2 \setminus \Omega$.

9.6 - Transformações de Möbius

Entre as transformações mais elementares no plano complexo temos

- a translação $T_b(z) = z + b$, por um b arbitrário em \mathbb{C} ,
- a inversão $\text{Inv}(z) = \frac{1}{z}$ e
- a multiplicação $M_a(z) = az$, por um a arbitrário em $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Escrevendo $a = re^{i\theta}$, com $r > 0$ e θ em \mathbb{R} , a multiplicação M_a é a composição

- da homotetia $H_r(z) = rz$ com
- a rotação $R_\theta(z) = e^{i\theta}z$.

Cada uma das funções acima é um homeomorfismo de S^2 em S^2 . Temos

$$T_b(\infty) = \infty \text{ [ponto fixo]}, \quad \text{Inv}(0) = \infty \quad \text{e} \quad \text{Inv}(\infty) = 0.$$

Também temos,

$$H_r(\infty) = R_\theta(\infty) = M_a(\infty) = \infty.$$

A seguir, definimos uma importante classe de transformações no plano que engloba a inversão, translações, homotetias, rotações e multiplicações e apresenta belas características geométricas. Logo mais, veremos que toda transformação nesta classe é, de fato, uma composição destas cinco transformações básicas.

Uma função φ é dita uma **transformação linear fracionária** se é da forma

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{com } a, b, c \text{ e } d \text{ em } \mathbb{C}.$$

Se temos

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0,$$

então φ é denominada uma **transformação de Möbius**.

9.13 Lema. *Consideremos uma transformação de Möbius*

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

- Se $c = 0$, então $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é linear e um isomorfismo analítico. Ainda,

$$|z| \rightarrow \infty \text{ se e somente se } |\varphi(z)| \rightarrow \infty.$$

- Se $c \neq 0$, então $\varphi : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ é bijetora e um isomorfismo analítico. A inversa φ^{-1} é a transformação de Möbius

$$\varphi^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Ainda mais,

$$|z| \rightarrow \infty \text{ se e só se } \varphi(z) \rightarrow \frac{a}{c} \quad \text{e} \quad z \rightarrow -\frac{d}{c} \text{ se e só se } |\varphi(z)| \rightarrow \infty.$$

Prova.

- ◇ Se $c = 0$, temos $ad \neq 0$ e $\varphi(z) = az/d + b/d$. O restante é então trivial.

- ◇ Se $c \neq 0$, escrevendo

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ para } z \neq -\frac{d}{c},$$

encontramos $z(cw - a) = b - dw$. Assim, obtemos

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}, \text{ para } w \neq \frac{a}{c}.$$

Logo, a transformação

$$\varphi : \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}$$

é bijetora e com inversa

$$\varphi^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Evidentemente φ e φ^{-1} são analíticas e então isomorfismos (analíticos).

Ainda, φ^{-1} é uma transformação de Möbius [pois, $da - (-b)(-c) = ad - bc \neq 0$].

Se $|z| \rightarrow \infty$, então $\varphi(z) = \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} \rightarrow \frac{a}{c}$.

Se $\varphi(z) = w \rightarrow \frac{a}{c}$, então $dw - b \rightarrow \frac{ad - bc}{c} \neq 0$ e $|z| = \frac{|dw - b|}{|-cw + a|} \rightarrow \infty$.

Analogamente, $|w| \rightarrow \infty$ se e somente se $\varphi^{-1}(w) \rightarrow -\frac{d}{c}$.

Isto é, $|\varphi(z)| \rightarrow \infty$ se e somente se $z \rightarrow -\frac{d}{c}$ ♣

Devido ao Lema 9.13, dada uma transformação de Möbius

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

definimos

$$\begin{cases} \varphi(\infty) = \infty, & \text{se } c = 0, \\ \varphi\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty \text{ e } \varphi(\infty) = \frac{a}{c}, & \text{se } c \neq 0. \end{cases}$$

Segue então, pelo Lema 9.13, que φ define um auto-homeomorfismo sobre a esfera de Riemann [isto é, um homeomorfismo de S^2 em S^2], e escrevemos

$$\varphi : S^2 \rightarrow S^2 \quad \text{ou} \quad \varphi : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}} \quad [\text{onde } \bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}].$$

Destaquemos então que o ponto ∞ é um ponto fixo de φ se e somente se φ é uma bijeção linear no plano, e que isto ocorre se e somente se $c = 0$.

À transformação de Möbius

$$\varphi : S^2 \rightarrow S^2$$

associamos a matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

no grupo linear das matrizes inversíveis 2×2 , com coeficientes complexos,

$$GL(2; \mathbb{C}).$$

Esta associação não é unívoca pois temos

$$\frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d} = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{qualquer que seja } \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Notemos que à transformação de Möbius $\varphi^{-1} : S^2 \rightarrow S^2$ associamos a matriz

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

O produto destas duas matrizes (em qualquer ordem) é a matriz $(ad - bc)I$, onde

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seja $M_2(\mathbb{C})$ o espaço vetorial das matrizes 2×2 , com coeficientes complexos, sobre o corpo dos números complexos. Analogamente, consideremos \mathbb{C}^2 como um espaço vetorial sobre \mathbb{C} .

Consideremos duas matrizes 2×2 complexas e inversíveis:

$$(9.7.1) \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ e } A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

Supondo que as matrizes A e A' nos dão a mesma transformação de Möbius, mostremos que o conjunto

$$\{A, A'\} \text{ é linearmente dependente.}$$

De fato, sob tal hipótese temos a identidade polinomial

$$(9.7.2) \quad (az+b)(c'z+d') = (a'z+b')(cz+d), \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Substituindo $z = 0$, obtemos $bd' - b'd = 0$. Donde segue, notando que $(b, d) \neq (0, 0)$,

$$(b', d') = \lambda(b, d), \text{ ou para } \lambda = \frac{b'}{b} \text{ ou para } \lambda = \frac{d'}{d}.$$

Identificando os coeficientes dominantes em (9.7.2) segue que $ac' - a'c = 0$. Note-mos que (a, c) não é nulo. Então, analogamente ao caso anterior temos

$$(a', c') = \mu(a, c) \text{ para algum } \mu \in \mathbb{C}.$$

Identificando os coeficientes lineares em (9.7.2) encontramos $ad' + bc' = a'd + b'c$. Substituindo a', b', c' e d' encontramos

$$a\lambda d + b\mu c = \mu ad + \lambda bc.$$

Donde segue, $\lambda(ad - bc) = \mu(ad - bc)$ e então $\lambda = \mu$. Isto é,

$$A' = \lambda A.$$

Tais observações sugerem que o conjunto das transformações de Möbius é um grupo (com a operação de composição) identificável com um grupo quociente.

Escrevemos

$$A' \equiv A \text{ se existe } \lambda \text{ em } \mathbb{C}^* \text{ tal que } A' = \lambda A.$$

Evidentemente \equiv é uma relação de equivalência.

Ainda mais, se $A' \equiv A$ e $B' \equiv B$, então $A'B' \equiv AB$. Logo,

$$GL(2; \mathbb{C}) / \equiv$$

é um grupo (quociente). Desta forma, existe uma “trivial” bijeção do grupo multiplicativo $GL(2; \mathbb{C}) / \equiv$ no conjunto das transformações de Möbius.

Mostremos que o conjunto das transformações de Möbius forma um grupo (com a operação composição).

A composição das transformações φ_A e $\varphi_{A'}$, associadas a A e A' é:

$$\varphi_A \circ \varphi_{A'} = \frac{a \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + b}{c \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + d} = \frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd')} = \varphi_{AA'}.$$

É claro que $\varphi_I(z) = Id(z) = z$, para todo z , e $\varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}} = \varphi_I = Id$. Logo, o conjunto das transformações de Möbius é um grupo identificável a $GL(2; \mathbb{C}) / \equiv$.

9.14 Proposição. *Seja φ uma transformação de Möbius. Então, φ é uma composição de translações, multiplicações e da inversão (não necessariamente todas). Mais especificamente, existem α, β e γ em \mathbb{C} tais que*

$$\varphi = \alpha z + \beta \quad \text{ou} \quad \varphi = T_\gamma \circ M_\alpha \circ Inv \circ T_\beta.$$

Prova. Mantenhamos as notações até aqui adotadas.

◇ O caso $c = 0$. Basta ver que $\varphi = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$.

◇ O caso $c \neq 0$. Segue de

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{c}\left(z + \frac{d}{c}\right) + \frac{b}{c} - \frac{a}{c}\frac{d}{c}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{b}{c} - \frac{a}{c}\frac{d}{c}}{z + \frac{d}{c}} \clubsuit$$

Vejamos algumas propriedades geométricas de uma transformação de Möbius.

9.15 Lema. *Exceto a identidade, uma transformação de Möbius $\varphi : S^2 \rightarrow S^2$ tem um ou dois pontos fixos (nem mais, nem menos) na esfera.*

Prova. Seja $\varphi(z) = (az + b)/(cz + d)$, distinta da identidade e com $ad - bc \neq 0$.

No Lema 9.13 vimos que ∞ é um ponto fixo de φ se e somente se $c = 0$.

- ◊ Caso $c = 0$. Então, $\varphi(\infty) = \infty$. Ainda mais, $\varphi(z) = (a/d)z + b/d$ se $z \in \mathbb{C}$. Como φ não é a identidade, temos $a/d \neq 1$ ou $b/d \neq 0$. Sendo assim, a equação $\varphi(z) = (a/d)z + (b/d) = z$ tem no máximo uma solução complexa.
- ◊ Caso $c \neq 0$. Então, $\varphi(\infty) \neq \infty$. Evidentemente, $\varphi(z) = (az + b)/(cz + d) = z$ tem no mínimo uma e no máximo duas soluções complexas♣

Pelo lema acima concluímos que se duas transformações de Möbius concidem em três pontos distintos então elas são iguais [cheque].

9.16 Teorema. *Em S^2 , sejam z_1, z_2 e z_3 distintos e w_1, w_2 e w_3 distintos. Então, existe uma única transformação de Möbius*

$$w = \varphi(z) \text{ satisfazendo } w_j = \varphi(z_j), \text{ para } j = 1, 2, 3.$$

Ainda, as variáveis w e z estão relacionadas pelas fórmulas abaixo.

- **Fórmula Fundamental.** *Se z_j e w_j são números, para $j = 1, 2, 3$, temos*

$$(9.16.1) \quad \frac{w - w_1}{w - w_2} \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}.$$

- *Se $w_2 = \infty$ e todos os demais valores são números (“deletamos w_2 ”),*

$$\frac{w - w_1}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}.$$

- *Se $z_2 = \infty$ e todos os demais valores são números (“deletamos z_2 ”),*

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z_3 - z_1}.$$

- *Se $z_2 = w_2 = \infty$ e os demais valores são números (“deletamos z_2 e w_2 ”),*

$$\frac{w - w_1}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z_3 - z_1} \quad [\text{linear}].$$

- *Se $z_2 = \infty$ e $w_3 = \infty$ e os demais valores são números (“deletamos z_2 e w_3 ”),*

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} = \frac{z - z_1}{z_3 - z_1}.$$

Prova. Trivial♣

9.17 Exemplos. *Seguem algumas transformações de Möbius.*

- *A transformação que envia $1, i, -1$ em $i, -1, 1$ (ordenadamente) é*

$$\frac{w-i}{w+1} \frac{2}{1-i} = \frac{z-1}{z-i} \frac{-1-i}{-2}.$$

Isto é,

$$w = \varphi(z) = \frac{(1+2i)z+1}{z+(1-2i)} \quad [\textit{cheque}].$$

- *A transformação que envia $-1, -i, 1$ em $-1, 0, 1$ (ordenadamente) é*

$$\frac{w+1}{w-0} \frac{1-0}{1+1} = \frac{z+1}{z+i} \frac{1+i}{2}.$$

Isto é,

$$w = \varphi(z) = \frac{z+i}{iz+1} \quad [\textit{cheque}].$$

A seguir, apresentamos uma terminologia apropriada ao estudo das transformações de Möbius.

Devido ao Teorema 9.10, todas as circunferências e retas no plano complexo correspondem a circunferências na esfera de Riemann S^2 .

As circunferências em S^2 e pelo polo $(0, 0, 1)$ são chamadas **retas na esfera de Riemann**.

Devido à correspondência citada, as circunferências e retas no plano complexo são chamadas **circunferências generalizadas** ou, brevemente, **circunferências**.

Sabidamente três pontos no plano e não colineares determinam uma circunferência no plano complexo. Por outro lado e com esta nova terminologia, três pontos colineares no plano determinam uma circunferência na esfera de Riemann S^2 e pelo “polo norte” $(0, 0, 1)$.

Consequentemente, quaisquer três pontos no plano (colineares ou não) determinam um circunferência (generalizada) no plano complexo.

9.18 Teorema. *Uma aplicação de Möbius φ , preserva o conjunto de retas e circunferências do plano (isto é, as circunferências generalizadas no plano). Equivalentemente, φ preserva as retas na esfera de Riemann S^2 .*

Prova. Pela Proposição 9.14, basta analisarmos a transformação inversão.

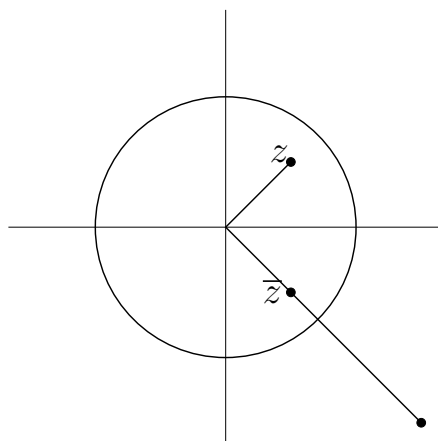


Figura 9.9: Ilustração para a transformação inversão

Sejam

$$z = x + iy \quad \text{e} \quad w = \frac{1}{z} = u + iv = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \left[\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \right].$$

Notemos que

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

A equação descrevendo uma reta ou uma circunferência ou um ponto ou o conjunto \emptyset no plano (x, y) é

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0, \quad \text{com } a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$$

Com a mudança de variável $w = 1/z$ obtemos, dividindo por $x^2 + y^2$,

$$a + bu - cv + d(u^2 + v^2) = 0,$$

cujos conjunto solução é uma reta ou circunferência ou um ponto ou \emptyset em \mathbb{R}^2 ♣

9.19 Corolário. *Sejam L_1 e L_2 circunferências (generalizadas) no plano (estendido). Então, existe uma transformação de Möbius φ tal que $\varphi(L_1) = L_2$. Ainda mais, podemos especificar que φ mapeia quaisquer três pontos distintos em L_1 em quaisquer três pontos distintos em L_2 . Com tal especificação, φ é então única.*

Prova. Solicito ao leitor♣

9.7 - As bijeções conformes (analíticas) do semi-plano superior em $B(0;1)$

Sejam

$$H^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\} \quad \text{e} \quad H^- = \{\bar{z} : z \in H^+\}$$

os semi-planos superior e inferior (abertos conexos) e a esfera de Riemann

$$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \text{ homeomorfa a } S^2.$$

Procuremos uma $\varphi : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ (de Möbius) satisfazendo $\varphi(H^+) = B(0;1)$. Existe uma que mapeia o “eixo” $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ no S^1 [vide Corolário 9.19].

Uma fórmula para $w = \varphi(z)$ que mapeia os pontos 0, 1 e ∞ [determinam a circunferência $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$] nos pontos -1 , $-i$ e 1 [determinam a circunferência S^1], nesta ordem, é dada por

$$\frac{w+1}{w+i} \frac{1+i}{2} = \frac{z-0}{z-1}.$$

Resolvendo para w obtemos

$$(9.20.1) \quad \varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$

Vejam que tal φ nos serve. O Corolário 9.19 mostra $\varphi(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = S^1$. Logo,

$$\varphi(H^+) \cup \varphi(H^-) = B(0;1) \cup \{z : |z| > 1\}.$$

Como $\varphi(i) = 0$, as conexidades de $\varphi(H^+)$ e de $B(0;1)$ garantem $\varphi(H^+) = B(0;1)$.

Segue uma outra finalização (bastante útil).

Argumento cinemático: observemos que a aplicação φ é conforme [cheque] e então preserva orientação [vide o comentário à Definição 9.3 e o Teorema 9.4]. O semi-plano superior H^+ está à esquerda da curva que descreve o movimento sobre o eixo real no sentido dos pontos 0, 1, ∞ , nesta ordem. Logo, $\varphi(H^+)$ está à esquerda da curva que descreve o movimento sobre S^1 e no sentido dado pelos pontos -1 , $-i$ e 1, nesta ordem [este é o sentido anti-horário].

9.20 Teorema. *As bijeções conformes $\psi : H^+ \rightarrow B(0;1)$ são da forma*

$$\psi(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}, \text{ onde } \text{Im}(\alpha) > 0.$$

Prova. [A prova que segue não utiliza o exemplo acima, mas se espelha nele.]

◇ Seja

$$w = f(z) = \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}, \text{ com } \alpha \text{ tal que } \text{Im}(\alpha) > 0.$$

Temos $|x - \alpha| = |x - \bar{\alpha}|$ para todo real x e então $f = f_\alpha$ é bijetora do “eixo real” $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ na circunferência em S^1 . Como temos $f(\alpha) = 0$, por conexidade segue $f(H^+) = B(0;1)$ [cheque].

◇ Seja $\psi : H^+ \rightarrow B(0;1)$ uma bijeção conforme qualquer. Existe α tal que $\psi(\alpha) = 0$. Então, $\psi \circ f^{-1}$ é um automorfismo de $B(0;1)$ e $\psi(f^{-1}(0)) = 0$. Pelo Teorema 9.6 temos $(\psi \circ f^{-1})(w) = e^{i\theta}w$, para algum θ em \mathbb{R} . Logo,

$$\psi(z) = e^{i\theta} f(z) \clubsuit$$

Exercício. Mostre a fórmula no Teorema 9.20 (acima) diretamente.

9.8 - Automorfismos (analíticos) do semi-plano superior

9.21 Teorema. *Os automorfismos de H^+ são da forma*

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ onde } a, b, c \text{ e } d \text{ são reais e } ad - bc > 0.$$

Prova. As transformações de Möbius h (como acima) e h^{-1} tem a mesma forma.

◇ Seja h com a forma enunciada. Temos que h é uma bijeção do “eixo real” $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ [já vimos que $h(-d/c) = \infty$ e $h(\infty) = a/c$, se $c \neq 0$; vimos que $h(\infty) = \infty$, se $c = 0$]. Ainda,

$$\text{Im}[h(i)] = \frac{ad - bc}{c^2 + d^2} > 0.$$

Isto é, $h(i)$ pertence a H^+ . Então, por conexidade, $h(H^+) \subset H^+$. Analogamente, $h^{-1}(H^+) \subset H^+$. Donde, h é um automorfismo de H^+ .

◇ Seja $h : H^+ \rightarrow H^+$ um automorfismo arbitrário e a particular bijeção conforme $\varphi : H^+ \rightarrow B(0;1)$, onde

$$\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i} \quad [\text{vide fórmula 9.20.1}],$$

com inversa

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{iz+i}{-z+1}.$$

Consideremos o automorfismo $\varphi \circ h \circ \varphi^{-1} : B(0;1) \rightarrow B(0;1)$.

Pelo Teorema 9.6 existem $\theta \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in B(0;1)$ tais que

$$\varphi \circ h \circ \varphi^{-1} = e^{i\theta} \phi_\alpha, \quad \text{onde } \phi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}.$$

Seja $M_{e^{i\theta}}(z) = e^{i\theta}z$ a multiplicação por $e^{i\theta}$. Então temos

$$h = \varphi^{-1} \circ M_{e^{i\theta}} \circ \phi_\alpha \circ \varphi.$$

Uma representação matricial com coeficientes reais para h segue do cômputo abaixo. O símbolo “ \equiv ” no cômputo indica matrizes equivalentes em $GL(2; \mathbb{C})$. Na segunda passagem multiplicamos uma das matrizes (é óbvia qual) por

$$ie^{-\frac{i\theta}{2}}.$$

Efetuem os cálculos:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ -\bar{\alpha} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ie^{i\theta} & i \\ -e^{i\theta} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\alpha & -i(\alpha+1) \\ 1-\bar{\alpha} & i(\bar{\alpha}+1) \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} -e^{\frac{i\theta}{2}} & -e^{-\frac{i\theta}{2}} \\ -ie^{\frac{i\theta}{2}} & ie^{-\frac{i\theta}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\alpha & -i(\alpha+1) \\ 1-\bar{\alpha} & i(\bar{\alpha}+1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\alpha-1)e^{\frac{i\theta}{2}} + (\bar{\alpha}-1)e^{-\frac{i\theta}{2}} & i(\alpha+1)e^{\frac{i\theta}{2}} - i(\bar{\alpha}+1)e^{-\frac{i\theta}{2}} \\ i(\alpha-1)e^{\frac{i\theta}{2}} - i(\bar{\alpha}-1)e^{-\frac{i\theta}{2}} & -(\alpha+1)e^{\frac{i\theta}{2}} - (\bar{\alpha}+1)e^{-\frac{i\theta}{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

As respectivas entradas a, b, c e d são reais e temos

$$h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

e então

$$0 < \text{Im}[h(i)] = \frac{ad-bc}{c^2+d^2} \clubsuit$$

9.9 - Outras Transformações Conformes

A função $w = z^a = e^{a \log z}$, com $a > 0$, é analítica em todo aberto simplesmente conexo que não contém a origem [Corolário 8.9]. Se escolhermos um ramo de $\log z$ que é real sobre o eixo positivo então $w = z^a$ como função de $(0, +\infty)$ nele próprio é sobrejetora. O ponto $z = re^{i\theta}$ é mapeado em $r^a e^{ia\theta}$ e então $w = z^a$ mapeia o setor angular $\Theta = \{z : \theta_1 < \text{Arg}(z) < \theta_2\}$ no setor angular $W = \{a\theta_1 < \text{Arg}(w) < a\theta_2\}$. Caso ocorra $a\theta_2 - a\theta_1 \leq 2\pi$, então $w = z^a$ é bijetora e conforme de Θ em W .

A aplicação $w = z^2$ é bijeção conforme do semi-plano superior e aberto H^+ no complementar de $[0, +\infty) \times \{0\}$ [tal complementar é um plano fendido].

A aplicação $w = z^{1/2}$ é uma bijeção conforme do semi-plano à direita e aberto $\{z : \text{Re}(z) > 0\}$ no setor angular $\{z : -\frac{\pi}{4} < \text{Arg}z < \frac{\pi}{4}\}$.

9.22 Exemplo. Uma transformação conforme ψ definida no semi-círculo superior $B^+(0; 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ e } \text{Im}(z) > 0\}$ no semi-plano superior H^+ .

Começamos mapeando o semi-círculo $B^+(0; 1)$ no primeiro quadrante aberto e $Q = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) > 0 \text{ e } \text{Im}(z) > 0\}$. Seja φ (de Möbius) tal que

$$-1 \mapsto 0, \quad i \mapsto i \text{ e } 1 \mapsto \infty.$$

Como φ preserva círculos/retas, φ mapeia a semi-circunferência unitária superior $S_+^1 = \{z : |z| = 1 \text{ e } \text{Im}(z) \geq 0\}$ no semi-eixo imaginário $\{iy : y \geq 0\}$. O segmento $\{z = x : -1 \leq x \leq 1\}$ forma, em $z = -1$, um ângulo de $\pi/2$ rad com a semi-circunferência superior S_+^1 . Logo, φ mapeia o eixo real no eixo real. Melhor ainda, como $-1 \mapsto 0$ e $1 \mapsto \infty$, então φ mapeia $\{z = x : -1 \leq x \leq 1\}$ no semi-eixo real $\{z = x : x \geq 0\}$. Ainda, φ preserva orientação e então $\varphi(B^+(0; 1)) = Q$. Logo,

$$\varphi : B^+(0; 1) \rightarrow Q \text{ é bijeção conforme.}$$

Portanto, $\varphi^2 : B(0; 1)^+ \rightarrow H^+$ é bijetora. Quanto à fórmula para $w = \varphi(z)$, temos

$$\frac{w-0}{w-i} = \frac{z+1}{z-i} \frac{1-i}{1+1}.$$

Logo, $w(2z-2i) = (1-i)(w-i)(z+1)$. Donde segue $\varphi(z) = (z+1)/(z-1)$ e

$$\psi(z) = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 \clubsuit$$

A função $w = e^z$, com $z = x + iy$, mapeia a faixa horizontal $\{z : \theta_1 < y < \theta_2\}$ em todo o setor $\{w : \theta_1 < \text{Arg}(w) < \theta_2\}$. Se $\theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi$, o mapeamento é bijetivo.