MAT 225 - FUNÇÕES ANALÍTICAS

Instituto de Matemática e Estatística da USP

Ano 2015

Professor Oswaldo R. B. de Oliveira

`http://www.ime.usp.br/~oliveira` oliveira@ime.usp.br

Capítulo 6 - Funções Analíticas

Capítulo 1

NÚMEROS COMPLEXOS

Capítulo 2

POLINÔMIOS

Capítulo 3

SÉRIES E SOMABILIDADE

Capítulo 4

SÉRIES DE POTÊNCIAS

Capítulo 5

FUNÇÕES ANALÍTICAS

Capítulo 6

FUNÇÕES ANALÍTICAS

6.1 - Introdução

Nem toda $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ é localmente dada por sua série de Taylor. Porém, no Capítulo 10 (Integração Complexa)) veremos que toda função derivável num aberto de $\mathbb{C}$ e a valores em $\mathbb{C}$ (ditas holomorfas) é analítica complexa. Ou seja, como toda série de potências é derivável em seu disco de convergência, os conceitos de holomorfia e analiticidade se equivalem em $\mathbb{C}$.

Os resultados para funções analíticas demonstrados neste capítulo serão automaticamente validados, no capítulo 10, para funções holomorfas.

6.1 Definição. *Uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$, com Ω aberto em $\mathbb{C}$, é* analítica *se para todo $a \in \Omega$ existe um raio $r = r(a) > 0$ e constantes $c_n \in \mathbb{C}$, com $n \in \mathbb{N}$, tais que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \text{ para todo } z \in B(a;r) \subset \Omega.$$

Denotamos por $\mathcal{A}(\Omega)$ o conjunto das funções analíticas em Ω.

Pela propriedade da translação 5.13, toda série de potências é analítica no seu disco (aberto) de convergência. Uma função é dita analítica em um conjunto X contido em $\mathbb{C}$ se ela tem uma extensão analítica a um aberto contendo X.

6.2 Proposição. *Sejam $f, g \in \mathcal{A}(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então, as funções*

(a) $f + g$ *(b)* λf

(c) fg *(d)* $\frac{1}{f}$, *se* f *não se anula em* Ω,

são todas analíticas em Ω.

Prova.

(a) Trivial.

(b) Trivial.

(c) Segue da propriedade para o produto para séries de potências.

(d) Segue da propriedade para o inverso algébrico para séries de potências♣

6.3 Teorema [Princípio do Prolongamento Analítico (PPA)]. *Sejam* Ω, *um aberto não vazio e conexo, e* $f \in \mathcal{A}(\Omega)$. *Se existe um aberto não vazio* $O \subset \Omega$ *tal que* $f|_O \equiv 0$, *então* f *é identicamente nula.*

Prova.

O conjunto

$$A = \left\{a \in \Omega : f^{(n)}(a) = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\right\} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \left(f^{(n)}\right)^{-1}(0)$$

contém O e é aberto graças às expansões de f em série de Taylor em torno dos pontos de A. Ainda mais, o conjunto A é fechado em Ω, pois cada $f^{(n)}$ é contínua e a intersecção (finita ou não) de fechados é um conjunto fechado. Por conexidade segue $A = \Omega$. Logo, $f \equiv 0$♣

A seguir mostramos dois resultados para funções analíticas análogos a conhecidos resultados para polinômios. O primeiro (Princípio dos zeros isolados) corresponde ao fato de que um polinômio não nulo tem zeros isolados. O segundo (Princípio de Identidade) corresponde ao fato de que um polinômio de grau n é determinado pelo seu valor em $n + 1$ pontos distintos.

Neste momento, é recomendável recordar Carathéodory:

Séries de potências são especialmente convenientes pois podemos manipulá-las quase que como polinômios.

Notação. Dada $f:\Omega\to\mathbb{C}$, o conjunto de zeros de f é $\mathcal{Z}(f)=\{z\in\Omega : f(z)=0\}$.

6.4 Teorema [Princípio dos Zeros Isolados (PZI)]. *Sejam Ω um aberto conexo e $f\in\mathcal{A}(\Omega)$, com f não nula. Seja $a\in\Omega$ tal que $f(a)=0$. Então, existem um número natural $m\geq 1$ e $g\in\mathcal{A}(\Omega)$ tais que*

$$f(z)=(z-a)^m g(z),\ \text{para todo } z\in\Omega,\ \text{com}\ \ g(a)\neq 0.$$

Ainda mais, $\mathcal{Z}(f)=\{z\in\Omega : f(z)=0\}$ é discreto e fechado em Ω.

Prova.

- Existe um raio $r>0$ e uma sequência complexa (b_n) tal que

  $$f(z)=b_1(z-a)+b_2(z-a)^2+b_3(z-a)^3+\cdots,\ \text{para todo } z\in B(a;r).$$

  Existe o menor natural $m\geq 1$ tal que $b_m\neq 0$. Caso contrário, $f|_{B(a;r)}$ é nula e, pelo princípio do prolongamento analítico, f é nula$\lightning$

  Então temos $b_m\neq 0$ e

  $$f(z)=(z-a)^m\big[b_m+b_{m+1}(z-a)+b_{m+2}(z-a)^2+\cdots\big],\ \text{para todo } z\in B(a;r).$$

  Desta forma, está bem definida a função

  $$g(z)=\begin{cases} b_m+b_{m+1}(z-a)+b_{m+2}(z-a)^2+\cdots,\ \text{se } z\in B(a;r), \\ \\ \frac{f(z)}{(z-a)^m},\ \text{se } z\in\Omega\setminus\{a\}, \end{cases}$$

  que é analítica, com $g(a)\neq 0$, e satisfaz $f(z)=(z-a)^m g(z)$ para todo $z\in\Omega$.

- Pelo visto acima e por continuidade, $\mathcal{Z}(f)$ é discreto e fechado em $\Omega\clubsuit$

Mantida a notação no princípio dos zeros isolados (PZI), dizemos que a é um zero de f de ordem m. Dizemos também que

$$m = \nu(f;a) = ord(f;a)$$

é a ordem de a como um zero de f.

6.5 Corolário (Princípio de Identidade). *Sejam Ω um aberto conexo, e duas funções f e g, ambas em $\mathcal{A}(\Omega)$. Suponhamos que o conjunto*

$$\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\} \quad \textit{tem ponto de acumulação em } \Omega.$$

Então, temos $f = g$.

Prova.

Trivial, pelo Princípio dos Zeros Isolados aplicado a $f - g$♣

Destaquemos que o *Princípio de identidade* (para funções analíticas) é bem distinto da já provada *Unicidade dos coeficientes de uma série de potências.*

6.6 Proposição. *Sejam $g \in \mathcal{A}(\Omega_1)$ e $f \in \mathcal{A}(\Omega_2)$, com $g(\Omega_1) \subset \Omega_2$. Então,*

$$f \circ g \in \mathcal{A}(\Omega_1).$$

Prova.

Consideremos um ponto a em Ω_1. Existe um raio $d > 0$ tal que temos

$$f(w) = \sum b_n[w - g(a)]^n, \text{ se } |w - g(a)| < d,$$

e também

$$g(z) = \sum c_n(z-a)^n \text{ se } |z-a| < d.$$

Como $c_0 = g(a)$, concluímos que existe r, onde $0 < r < d$, para o qual temos

$$|g(z) - g(a)| < d \text{ se } |z-a| < r.$$

A conclusão final segue então da propriedade de composição (5.15)♣

6.2 - O Teorema da Aplicação Aberta

6.7 Teorema da Aplicação Aberta (TAA). *Seja Ω um aberto não vazio e conexo e $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, com f não constante. Então, $f(\Omega)$ é um aberto.*

Prova (Carathéodory).

Seja $a \in \Omega$. A mudança de variável $w \mapsto z = w + a$ nos permite supor $a = 0$.

Pelo PZI, $z = 0$ é zero isolado da função não constante $f(z) - f(0)$. Então, existe $\epsilon > 0$ tal que $f(z) - f(0) \neq 0$ se $z \in \partial B(0;\epsilon)$. Logo,

$$f(0) \notin f\big(\partial B(0;\epsilon)\big).$$

Sejam $2d = \min_{z \in \partial B(0;\epsilon)} |f(z) - f(0)|$, um ponto $\beta \in B(f(0);d)$ e a função $f(z) - \beta$.

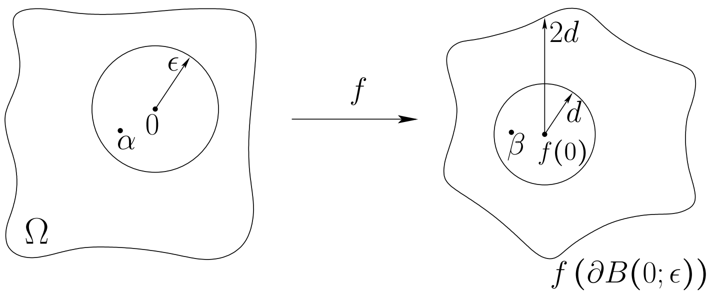

Figura 6.1: Teorema da Aplicação Aberta

Para o centro $z = 0$ de $B(0;\epsilon)$ temos $|f(0) - \beta| < d$. Porém, para $z \in \partial B(0;\epsilon)$,

$$|f(z) - \beta| \geq |f(z) - f(0)| - |f(0) - \beta| > 2d - d = d.$$

Assim, o ponto α de mínimo da função $|f(z) - \beta|$ no disco $D(0;\epsilon)$, está em $B(0;\epsilon)$. Utilizando tal informação e também o PZI, encontramos o sistema

$$\begin{cases} |f(z) - \beta|^2 \geq |f(\alpha) - \beta|^2, \ \text{para todo } z \in B(0;\epsilon), \\ f(z) = f(\alpha) + (z-\alpha)^m g(z), \ \text{para todo } z \in \Omega, \ \text{com } m \geq 1, g \in \mathcal{A}(\Omega) \text{ e } g(\alpha) \neq 0. \end{cases}$$

Substituindo $z = \alpha + r\omega$, com $r > 0$ e pequeno o suficiente e $\omega \in S^1$, obtemos

$$|f(\alpha) + r^m \omega^m g(\alpha + r\omega) - \beta|^2 \geq |f(\alpha) - \beta|^2.$$

Desenvolvendo o lado esquerdo de tal desigualdade, similarmente à prova do TFA, cancelamos $|f(\alpha - \beta|^2$ e r^m, fixamos ω e então, impondo $r \to 0^+$ encontramos

$$\mathrm{Re}\Big\{\overline{[f(\alpha) - \beta]} g(\alpha)\omega^m\Big\} \geq 0, \ \text{para todo } \omega \in S^1.$$

Donde segue $\overline{[f(\alpha) - \beta]} g(\alpha) = 0$ e então $f(\alpha) = \beta$. Logo, $B(f(0);d) \subset f(\Omega)$ ♣

O próximo corolário segue imediatamente do TAA.

6.8 Corolário. *Seja $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, com f não constante e Ω um aberto conexo.*

- **Princípio do Módulo Máximo**. *$|f|$ não tem máximo local.*
- **Princípio do Módulo Mínimo**. *$|f|$ não tem mínimo local ou f se anula.*

Prova. Solicitamos ao leitor deenvolver tal prova.

6.9 Corolário. *Seja Ω um aberto limitado (conexo ou não) e $f \in \mathcal{A}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.*

- *O máximo de $|f|$ é atingido em $\partial\Omega$.*
- *O mínimo de $|f|$ é atingido em $\partial\Omega$, ou f se anula.*

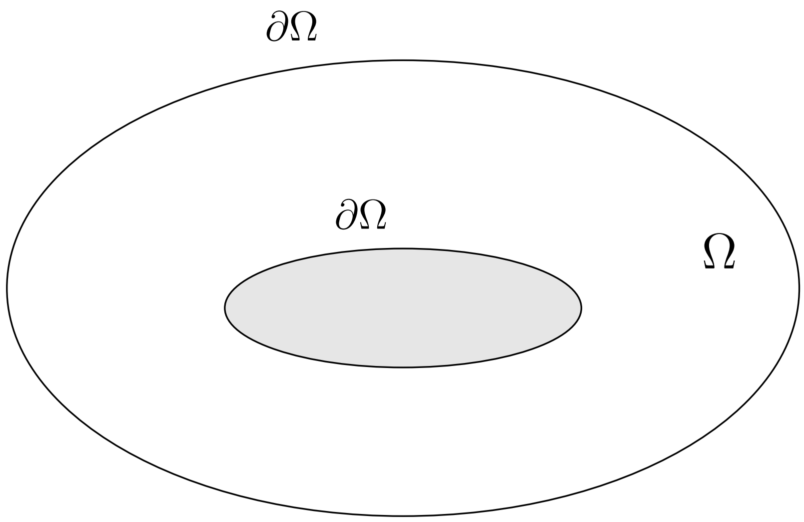

Figura 6.2: Ilustração ao Corolário 6.9

Prova. [Um esboço, complete a prova.]

A função $|f|$ atinge um máximo e também um mínimo em $\overline{\Omega}$. Se tal ponto de máximo/mínimo, pertence a $\partial\Omega$ então a afirmação correspondente está verificada.

Se tal ponto de máximo/minimo pertence a Ω então tal ponto pertence a uma componente conexa (que é aberta) do aberto Ω.

Por fim, basta notarmos que os princípios do módulo máximo e do módulo mínimo valem em cada uma das componentes (conexas) do aberto Ω e também que a fronteira de cada um destas componentes é um subconjunto de $\partial\Omega$♣

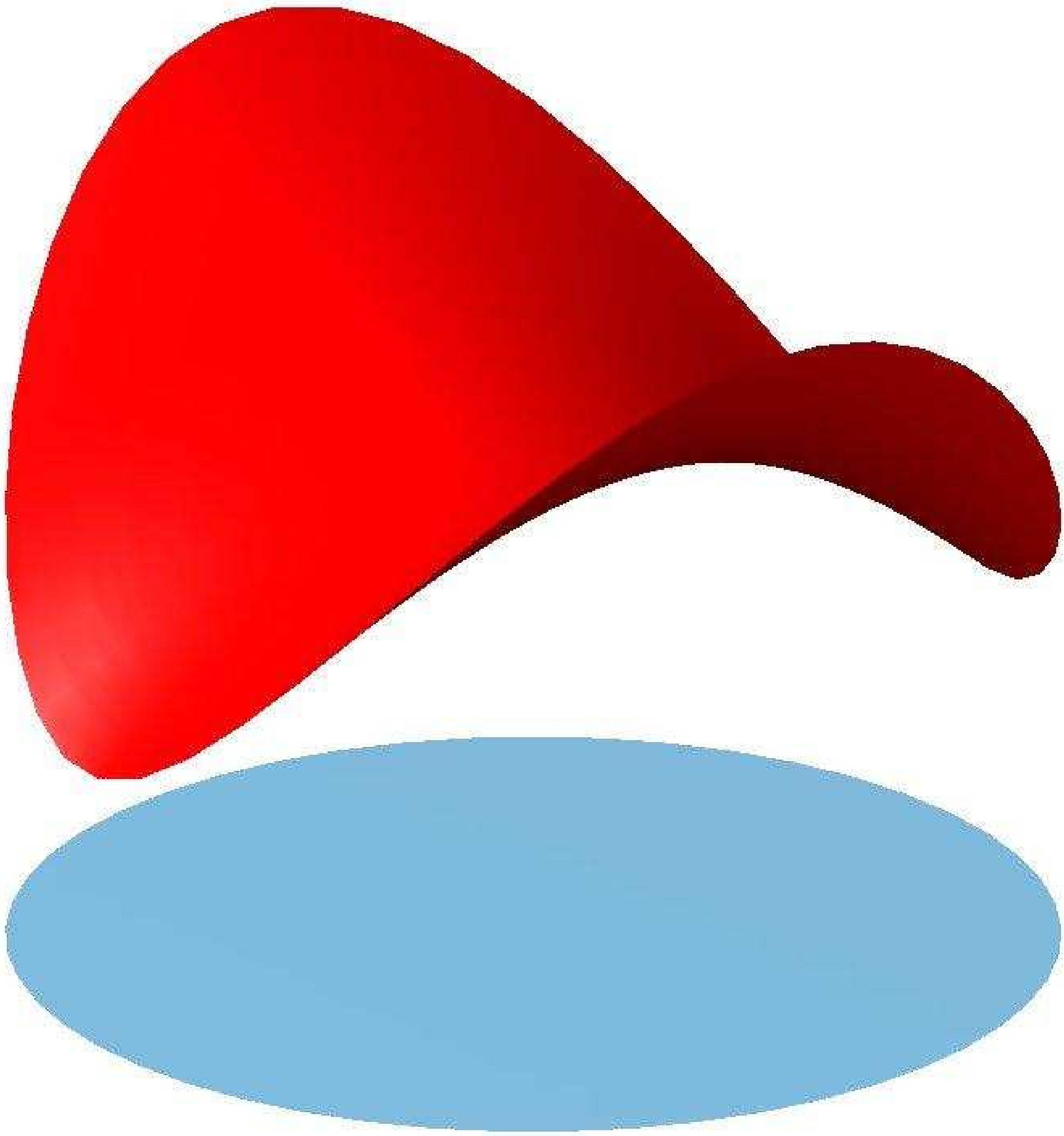

Figura 6.3: Ilustração ao princípio do módulo máximo (e também ao princípio do módulo mínimo), Corolário 6.8. Paisagem analítica da função complexa $\cos z$, com $z \in B(0;1)$. Isto é, o gráfico em $\mathbb{R}^3$ da função $|\cos(x+iy)|$, com $x^2+y^2<1$. O módulo máximo não pode ser assumido em um ponto da bola aberta (azul) no plano. O ponto mais alto do gráfico (vermelho) está em algum lugar da borda do gráfico. Picture by Oleg Alexandrov.

Segundo Weierstrass, uma função inteira é dada por uma série de potências convergente em $\mathbb{C}$. Atualmente, uma função é inteira se é holomorfa em $\mathbb{C}$.

Todo polinômio não constante $P(z)$ satisfaz

$$|P(z)| \to +\infty \text{ se } |z| \to +\infty.$$

Logo, todo polinômio limitado é uma constante.

Destaquemos então que, sob tal prisma, é bastante intuitivo o teorema abaixo.

6.10 Teorema (Liouville, 1847). *Seja $f(z) = \sum a_n z^n$, onde $z \in \mathbb{C}$, limitada. Então, $f \equiv a_0$.*

Prova.

É limitada a função

$$|f(z) - a_0| = |z|\,|\,a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \cdots|, \text{ onde } z \in \mathbb{C}.$$

Donde, se $|z| \to +\infty$ então $\varphi(z) = (a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \cdots)$ tende a zero. Portanto, a função $|\varphi|$ tem máximo global. Pelo Princípio do Módulo Máximo segue que φ é constante. Portanto, φ é nula e f é constante♣

Seja

$$f : \Omega \to O, \text{ com } \Omega \text{ e } O \text{ abertos em } \mathbb{C}.$$

Dizemos que f é um isomorfismo analítico (ou biholomorfismo) se f é bijetora e f e f^{-1} são holomorfas. [A "dubiedade" nesta tradicional nomenclatura desaparecerá ao provarmos, no capítulo 10, que toda função holomorfa é analítica.] Ainda, dizemos que f é um automorfismo analítico, se $O = \Omega$ e f é um isomorfismo analítico. Ainda mais, f é um isomorfismo analítico local no ponto z_0 se existirem um aberto U_0 contendo z_0 e um aberto V_0 contendo $f(z_0)$ tais que

$$f|_{U_0} : U_0 \to V_0$$

é isomorfismo analítico. Por fim, f é um isomorfismo analítico local se f é um isomorfismo analítico local em cada ponto de Ω.

6.11 Teorema da Função Inversa (versão local). *Seja* $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ *e* $a \in \Omega$ *tal que* $f'(a) \neq 0$. *Então, existe* $r > 0$ *tal que*

- f *é injetora em* $B(a;r) \subset \Omega$ *e* $f\big(B(a;r)\big) = V$ *é um aberto contendo* $f(a)$.
- $f|_{B(a;r)} : B(a;r) \to V$ *é um isomorfismo analítico (com inversa analítica).*

Prova.

Através da aplicação $z \mapsto f(z+a) - f(a)$, podemos supor $a = 0$ e $f(a) = 0$.

Temos então

$$f(z) = \sum_{n\geq 1} a_n z^n \text{ numa bola } B(0;r_1), \text{ com } r_1 > 0 \text{ e } a_1 = f'(0) \neq 0.$$

Invertendo tal séries de potências (Teorema 5.20), temos $g(z) = \sum_{n\geq 1} b_n z^n$ tal que

$$f(g(z)) = z \ \text{ e } \ g(f(z)) = z \ \text{ para todo } z \text{ em } B(0;r), \text{ para algum } r > 0.$$

Pelo teorema da aplicação aberta, $V = f(B(0;r))$ é aberto. Ainda mais, $f : B(0;r) \to V$ é bijetora e analítica e sua inversa $g : V \to B(0;r)$ é analítica♣

6.3 - Desigualdades de Gutzmer-Parseval e de Cauchy

6.12 Teorema (Desigualdade de Gutzmer (1888)-Parseval). *Seja*

$$f(z) = \sum a_n z^n \ \textit{convergente em } B(0;\rho), \ \textit{com } \rho > 0.$$

Dado r *tal que* $0 \leq r < \rho$, *vale a desigualdade*

$$\sum |a_n|^2 r^{2n} \leq M(r)^2, \quad \textit{com } M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Prova. Seja z tal que $|z| = r$.

Pela desigualdade triangular temos,

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n z^n\right| \leq M(r) + \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n z^n\right| \leq M(r) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| r^n, \text{ para todo } N \in \mathbb{N}.$$

Assim, pela desigualdade de Gutzmer-Parseval para polinômios (3.4),

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 r^{2n} \leq \left(M(r) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| r^n\right)^2, \text{ para todo } N \in \mathbb{N}.$$

Por fim, observando que

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| r^n = 0,$$

basta impor $N \to +\infty$ na desigualdade imediatamente acima♣

6.13 Corolário (Desigualdades de Cauchy). *Com as hipóteses e as notações do teorema, obtemos*

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}, \ \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Prova. Trivial♣

6.4 - Teorema de Hurwitz e Lema de Schwarz

Se uma função é analítica numa bola, não é trivial que ela é dada, em todos os pontos, por sua série de potências em torno do centro. Analisemos tal situação.

6.14 Lema. *Dada* $f \in \mathcal{A}\big(B(0;R)\big)$, *consideremos* $0 < r < R$ *e* $n \in \mathbb{N}$. *Temos*

$$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{M(r)}{r^n}, \quad \textit{onde} \quad M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

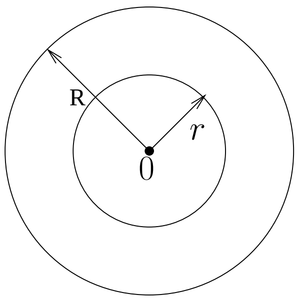

Figura 6.4: Ilustração ao Lema 6.14

Prova (Whyburn)**.** Podemos supor $f^{(n)}(0) \neq 0$.

Seja ω uma raiz primitiva das raízes $2n$-ésimas da unidade e

$$g(z) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k f(z\omega^k), \quad z \in B(0;R) \ \ (\text{notemos que } \omega^n = -1).$$

Então, g é analítica e

$$g^{(j)}(0) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \omega^{jk} f^{(j)}(0) = \begin{cases} f^{(j)}(0)\frac{1-\omega^{j2n}}{1+\omega^j} = 0, \ \text{se } 0 \leq j < n, \\ \\ 2nf^{(n)}(0), \ \text{se } j = n. \end{cases}$$

Pelo princípio dos zeros isolados existe uma φ analítica em $B(0;R)$ tal que

$$g(z) = z^n \varphi(z), \quad \text{com } \varphi(0) = 2n\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Pelo princípio do módulo máximo,

$$2n\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \le \max_{|z|=r} |\varphi(z)| = \max_{|z|=r} \frac{|g(z)|}{r^n} \le \frac{2nM(r)}{r^n} \clubsuit$$

6.15 Teorema (Hurwitz, para séries de potências). *Dada $f \in \mathcal{A}\big(B(0;R)\big)$, temos*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad \textit{para todo } z \in B(0;R).$$

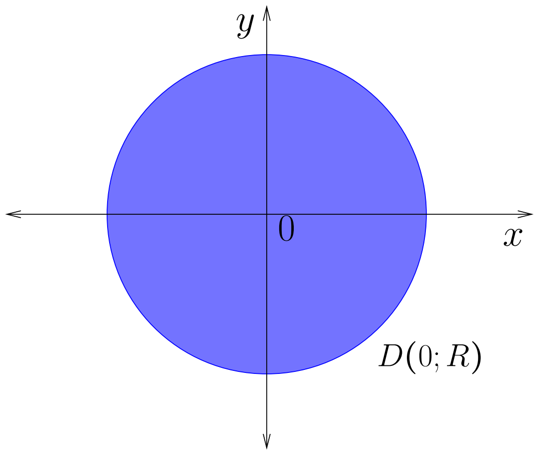

Figura 6.5: Teorema de Hurwitz para séries de potências.

Prova. Fixemos r, com $0 < r < R$. Indiquemos $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Pelo lema (6.14) encontramos

$$|a_n| r^n \le M(r), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Seja ρ o raio de convergência de $\sum a_n z^n$. Pela fórmula de Hadamard,

$$\frac{1}{\rho} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup \frac{\sqrt[n]{M(r)}}{r} = \frac{1}{r}, \text{ para todo } 0 < r < R.$$

Portanto, $\rho \ge R$ $\clubsuit$

Conclusão. Dada uma função f analítica em Ω, a série de Taylor de f em um ponto a converge na maior bola aberta $B(a;r)$ contida em Ω. Desta forma, se f é analítica em $\mathbb{C}$ então f é uma função inteira no sentido de Weierstrass.

6.16 Lema de Schwarz (1869). *Seja f analítica em $B(0;1)$ e satisfazendo*

$$|f(z)| \leq 1, \text{ para todo } z \in B(0;1), \text{ e } f(0) = 0.$$

As seguintes afirmações são verdadeiras.

- $$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right|^2 \leq 1 \quad (e, |f'(0)| \leq 1) \quad e \quad |f(z)| \leq |z|, \text{ para todo } z \in B(0;1).$$
- *Ocorre* $|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}| = 1$, *para algum* $n \geq 1$, *se e somente se existe* $\omega \in S^1$ *tal que*
$$f(z) = \omega z^n, \text{ para todo } z \in B(0;1).$$
- *Ocorre* $|f(z)| = |z|$, *para algum* $z \neq 0$, *se e somente se existe* $\omega \in S^1$ *tal que*
$$f(z) = \omega z, \text{ para todo } z \in B(0;1).$$

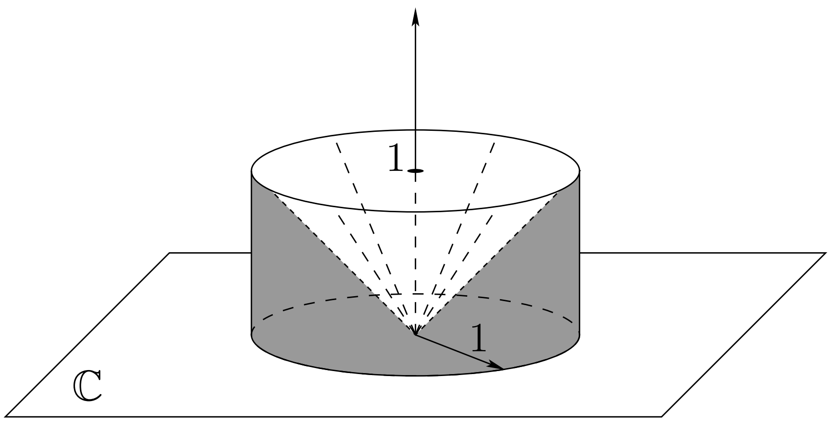

Figura 6.6: Lema de Schwarz (e a paisagem analítica para f)

Prova. Dividamos a prova em quatro partes.

◇ Como $f(0) = 0$, pelo Teorema de Hurwitz (6.15) segue

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n z^n \text{ para todo } z \in B(0;1), \quad \text{com } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Temos $|f(z)| \leq 1$ em $B(0;1)$. Pela desigualdade de Gutzmer-Parseval segue

$$(|a_1|^2 r^2 + |a_2|^2 r^4 + |a_3|^2 r^6 + \cdots) \leq 1\,, \text{ para todo } r \text{ em } [0,1),$$

e então impondo $r \to 1^-$ obtemos

$$(|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 + \cdots) \leq 1\,.$$

◇ Portanto, se ocorre $|a_n| = 1$ para um particular $n \geq 1$, obtemos

$$f(z) = a_n z^n \text{ para todo } z \in B(0;1).$$

◇ Seja $r \in (0,1)$. Se $\zeta \in \{z : |z| = r\}$, então temos

$$\Big|\sum_{n\geq 1} a_n \zeta^{n-1}\Big| = \frac{1}{r}\Big|\sum_{n\geq 1} a_n \zeta^n\Big| \leq \frac{1}{r}.$$

Donde, pelo princípio do modulo máximo segue

$$\Big|\sum_{n\geq 1} a_n z^{n-1}\Big| \leq \frac{1}{r}, \text{ para todo } z \in D(0;r).$$

Assim, como $0 < r < 1$ é arbitrário, temos [cheque]

$$\Big|\sum_{n\geq 1} a_n z^{n-1}\Big| \leq 1, \text{ para todo } z \in B(0;1). \tag{6.16.1}$$

Então,

$$|f(z)| = \Big|z\sum_{n\geq 1} a_n z^{n-1}\Big| \leq |z| \text{ para todo } z \in B(0;1).$$

◇ Se ocorre

$$\Big|\sum_{n\geq 1} a_n \zeta^n\Big| = |\zeta|, \text{ para algum } 0 < |\zeta| < 1,$$

obtemos

$$\Big|\sum_{n\geq 1} a_n \zeta^{n-1}\Big| = 1.$$

Porém, repetindo (6.16.1) temos $|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n-1}| \leq 1$, para todo z em $B(0;1)$. Portanto, aplicando o princípio do módulo máximo obtemos

$$\sum_{n\geq 1} a_n z^{n-1} = a_1 \in S^1, \text{ para todo } z \in B(0;1).$$

Dessa forma temos

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n = a_1 z, \text{ para todo } z \in B(0;1) \clubsuit$$

Comentário. Dada uma função analítica $f = f(z) = f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ definida em um subconjunto Ω do plano complexo e seu campo associado $F(x,y) = \big(u(x,y,v(x,y)$ definido em um subconjunto O do plano cartesiano, o gráfico da função $|F|$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ denominado paisagem analítica de f:

$$\{(x,y,t) : t = |F(x,y)|, \text{ com } (x,y) \in O\} \equiv \{(z,t) : t = |f(z)| \text{ com } z \in \Omega\}.$$

Na Figura 6.5 temos a paisagem analítica de uma f como no Lema de Schwarz.

6.5 - Apêndice. Teorema da Representação Local e Teorema da Função Inversa (versão global).

6.17 Teorema (Representação Local). *Seja f uma função analítica em uma vizinhança de um ponto a e tal que*

$$f(z) = f(a) + \sum_{n=m}^{+\infty} b_n (z-a)^n, \text{ com } m \geq 1 \text{ fixo e } b_m \neq 0.$$

Então, existem um aberto V contendo a origem, uma bola $B(0;r)$ de raio $r > 0$, e um isomorfismo analítico $\varphi : V \to B(0;r)$, com $\varphi(0) = 0$, satisfazendo

$$f(z) = f(a) + [\varphi(z-a)]^m, \text{ para todo } z \text{ em } a+V.$$

Ainda, dado $\beta \in B\big(f(a); r^m\big) \setminus \{f(a)\}$ a pré-imagem $f^{-1}(\beta)$ tem m elementos.

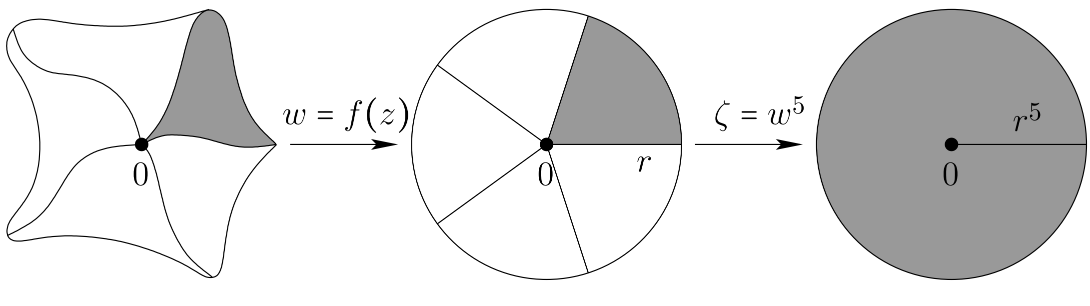

Figura 6.7: Teorema de Representação Local (para $m = 5$)

Prova. (Duas partes.)

⋄ Escrevamos

$$f(z) - f(a) = b_m (z-a)^m [1 + g(z-a)], \quad g(0) = 0.$$

Seja $b \in \mathbb{C}^*$, com $b^m = b_m$. Através da série binomial (5.19) e a propriedade de composição (5.15) consideremos a série de potências $G(z)$ satisfazendo

$$1 + g(z) = \big(1 + G(z)\big)^m \text{ e } G(0) = 0, \text{ em uma vizinhança de } 0.$$

Temos então,

$$f(z) - f(a) = b^m (z-a)^m \big(1 + G(z-a)\big)^m = \Big[b(z-a)\big(1 + G(z-a)\big)\Big]^m.$$

Donde segue

$$f(z) = f(a)+[\varphi(z-a)]^m, \text{ com } \varphi(w) = bw\big(1+G(w)\big), \ \varphi(0) = 0 \text{ e } \varphi'(0) = b \neq 0.$$

Pelo teorema da função inversa (local) 6.11, a função φ satisfaz o exigido.

$\diamond$ É trivial ver que $\beta - f(a) = \varphi(w)^m$ para algum $w \in V \setminus \{0\}$.

Se $\omega^m = 1$, então existe um único $\zeta = \zeta_\omega$ em V tal que $\varphi(\zeta) = \omega\varphi(w)$. Logo,

$$f(a+\zeta) = f(a) + \varphi(\zeta)^m = f(a) + \varphi(w)^m = \beta.$$

Para completar, observemos que a associação $\omega \mapsto \zeta_\omega$ é injetora$\clubsuit$

Dada $f(z) = \sum a_n z^n$ não nula, o menor m tal que $a_m \neq 0$ é a ordem de f.

O teorema abaixo será utilizado na prova do teorema da aplicação de Riemann.

6.18 Teorema da Função Inversa (Versão Global). *Seja Ω um aberto conexo e não vazio em $\mathbb{C}$. Seja f em $\mathcal{A}(\Omega)$ e injetora. Então, f' não se anula, o conjunto $f(\Omega)$ é aberto e*

$$f : \Omega \to f(\Omega) \text{ é um isomorfismo analítico (com inversa analítica).}$$

Prova.

Pelo teorema da aplicação aberta, o conjunto $f(\Omega)$ é aberto. Seja a em Ω. Com a notação do teorema de representação (6.12) temos (localmente)

$$f(z) = f(a) + [\varphi(z-a)]^m, \text{ com } m = 1.$$

Logo, $f'(a) = \varphi'(0) \neq 0$. Pelo teorema da função inversa local, f^{-1} é analítica$\clubsuit$

6.6 - Apêndice. Desigualdades de Cauchy (revisitadas).

6.19 Teorema (Desigualdades de Cauchy, revisitadas). *Seja*

$$f(z) = \sum a_n z^n \ \textit{convergente em } B(0;\rho), \ \textit{com } \rho > 0.$$

Seja

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Suponhamos $0 \leq r < R < \rho$. *Então, para todo* $n \in \mathbb{N}$ *vale*

$$\max_{|z|\leq r} |f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{(R-r)^n} M(R) \quad e \quad |a_n| \leq \frac{M(R)}{R^n}.$$

Prova. Seja a em $D(0;r)$.

A série de Taylor de f centrada em a é (vide propriedade da translação 5.13)

$$f(z) = \sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n\,, \text{ se } |z-a| < R-r.$$

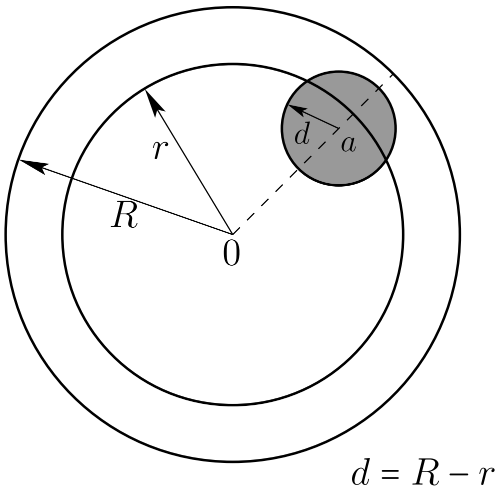

Figura 6.8: Desigualdades de Cauchy revisitadas (teorema 6.19)

Donde, pela desigualdade de Gutzmer-Parseval para séries de potências,

$$\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} |z-a|^n \leq M(R)\,, \text{ se } |z-a| < R-r.$$

Impondo $|z-a| \to (R-r)^-$, encontramos

$$|f^{(n)}(a)|(R-r)^n \leq M(R) n! \clubsuit$$

Apêndice 6.7 - Teorema da Série Dupla de Weierstrass. Teoremas de Convergência de Weierstrass e de Hurwitz.

6.20 Teorema (Série Dupla). *Seja $R > 0$. Para $\nu = 0, 1, 2\ldots$, seja*

$$f_\nu(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\nu) z^n$$

uma série de potências, com coeficientes complexos $a_n(\nu)$, convergente em $B(0;R)$. Suponhamos que a série de funções $\sum_{\nu=0}^{+\infty} f_\nu$ converge uniformemente em cada disco $D(0;\rho)$, onde $0 < \rho < R$. Definamos

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} f_\nu(z), \ \ onde\ z \in B(0;R).$$

Então, para quaisquer $z \in B(0;R)$ e $k \in \mathbb{N}$ temos, com convergência uniforme sobre cada disco $D(0;\rho)$ onde $0 < \rho < R$,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_n(\nu) z^n \qquad e \qquad F^{(k)}(z) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} f_\nu^{(k)}(z).$$

Prova.

Sejam ρ e r satisfazendo $0 < \rho < r < R$.

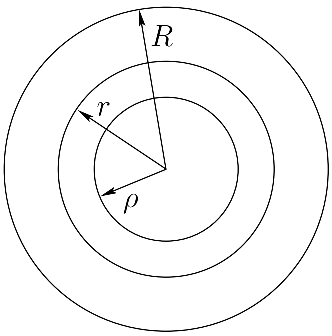

Figura 6.9: Prova do Teorema de Weierstrass

Por hipótese [vide também critério 5.6], dado $\epsilon > 0$ existe $\nu_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_{\nu+1}(z) + \cdots + f_{\nu+p}(z)| \le \epsilon, \ \ \text{para quaisquer } \nu \ge \nu_0,\ p \in \mathbb{N} \text{ e } |z| \le r.$$

Pela desigualdade de Gutzmer-Parseval 6.12, e as condições acima para ν, p e z,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n(\nu+1) + \cdots + a_n(\nu+p)|^2 \, |z|^{2n} \le \epsilon^2.$$

Portanto, quaisquer que sejam $z \in D(0;\rho)$, $\nu \geq \nu_0$, $p \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$, temos

$$|a_n(\nu+1)+\cdots+a_n(\nu+p)|\,|z|^n = \sqrt{|a_n(\nu+1)+\cdots+a_n(\nu+p)|^2\, r^{2n}}\ \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \leq \epsilon\left(\frac{\rho}{r}\right)^n .$$

Então, pelo critério de Cauchy para séries numéricas, para todo $n \in \mathbb{N}$ a série $\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_n(\nu)$ é convergente e para $\nu \geq \nu_0$ e $z \in D(0;\rho)$ temos, computando o limite na desigualdade acima para $p \to +\infty$ e a seguir o somatório para n de 0 a $+\infty$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_n(\nu) - \sum_{\mu=0}^{\nu} a_n(\mu)\right| |z|^n \leq \epsilon\left(1-\tfrac{\rho}{r}\right)^{-1}.$$

Assim sendo, fixado um arbitrário $z \in D(0;\rho)$, para todo $\nu \geq \nu_0$ temos

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_n(\nu) - \sum_{\mu=0}^{\nu} a_n(\mu)\right] z^n\right| \leq \epsilon\left(1-\frac{\rho}{r}\right)^{-1}$$

e portanto

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_n(\nu)\, z^n \ - \ \sum_{\mu=0}^{\nu} f_\mu(z)\right| \leq \epsilon\left(1-\frac{\rho}{r}\right)^{-1}.$$

Tomando ρ próximo de R segue,

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} f_\nu(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_n(\nu)\, z^n, \quad \text{em cada ponto } z \in B(0;R),$$

com (devido à hipótese) convergência uniforme em cada disco $D(0;\rho)$.

Para finalizar, consideremos a sequência $s_\nu = f_0+\cdots+f_\nu$ das somas parciais de

$$\sum_{\nu\geq 0} f_\nu .$$

Por hipótese, a sequência $(s_\nu - F)$ converge uniformemente à função nula em cada $D(0;\rho)$ e portanto, pelas desigualdades de Cauchy (6.19), fixado um natural k a sequência $(s_\nu^{(k)} - F^{(k)})$ também. Donde segue

$$\sum_{\nu\geq 0} f_\nu^{(k)}(z) = F^{(k)}(z)\,, \quad \text{para arbitrários } k \in \mathbb{N} \text{ e } z \in B(0;R)\, \clubsuit$$

Comentário. O teorema da série dupla efetua a soma das linhas da tabela

$$\begin{array}{ccccccccc}
f_0(z) & = & a_0(0) & + & a_1(0)z & + & a_2(0)z^2 & + & \cdots \\
f_1(z) & = & a_0(1) & + & a_1(1)z & + & a_2(1)z^2 & + & \cdots \\
f_2(z) & = & a_0(2) & + & a_1(2)z & + & a_2(2)z^2 & + & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\hline
\sum_{\nu=0}^{+\infty} f_\nu(z) & = & \sum_{\nu=0}^{+\infty} a_0(\nu) & + & \sum_{\nu=0}^{+\infty} a_1(\nu)z & + & \sum_{\nu=0}^{+\infty} a_2(\nu)z^2 & + & \cdots .
\end{array}$$

A seguir, sejam $X \subset \mathbb{C}$, uma função $f \in C(X;\mathbb{C})$ e K um subconjunto compacto de X. A **norma (do sup)** de f sobre o compacto K é definida por

$$|f|_K = \sup\{|f(z)| : z \in K\}.$$

Uma sequência, ou série, de funções definidas em X e a valores em $\mathbb{C}$ **converge compactamente** em X se converge uniformemente sobre cada compacto em X.

6.21 Corolário (Convergência, Weierstrass). *Seja $(f_n)_{\mathbb{N}}$ em $\mathcal{A}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, com Ω um aberto limitado, tal que a sequência $(f_n|_{\partial\Omega})$ converge uniformemente.*

- *Existe $f = \lim f_n$ e $f \in \mathcal{A}(\Omega)$.*
- *$(f_n^{(k)})$ converge compactamente a $f^{(k)}$, sobre Ω, para todo k em $\mathbb{N}$.*

Prova. Seja $D(a;r)$ um disco em Ω.

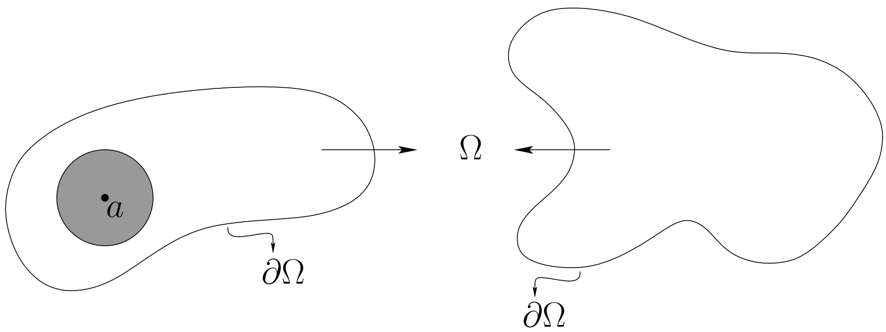

Figura 6.10:

Pelo princípio do módulo máximo temos

$$|f_m - f_n|_{D(a;r)} \leq |f_m - f_n|_{\partial\Omega}, \text{ para todos } m \text{ e } n.$$

O disco é arbitrário e então (f_n) converge compactamente em Ω.

Seja $f(z) = \lim f_n(z)$.

Pelo Teorema de Hurwitz (6.15), em $B(a;r)$ cada f_n é dada por sua série de Taylor em torno de a. A n-ésima soma parcial da série

$$f_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (f_{n+1} - f_n)$$

é dada por $s_n = f_1 + (f_2 - f_1) + \cdots + (f_{n+1} - f_n) = f_{n+1}$ que converge uniformemente à função f em $D(a;r)$. Pelo Teorema de Weierstrass segue que

$$f \in \mathcal{A}\big(B(a;r)\big) \text{ e } f_n^{(k)} \to f^{(k)} \text{ compactamente sobre } B(a;r), \text{ para todo } k.$$

Como $D(a;r)$ é qualquer, segue que $f \in \mathcal{A}(\Omega)$. Segue também que $\big(f_n^{(k)}\big)$ converge compactamente a $f^{(k)}$ no aberto Ω, para todo k [cheque] ♣

6.22 Teorema de Convergência [Hurwitz (1889)]. *Seja* Ω *um aberto conexo e* $(f_n) \subset \mathcal{A}(\Omega)$ *convergindo compactamente a* f*, com cada* f_n *sem zeros. Então,* f *não tem zeros ou* $f \equiv 0$*.*

Prova.

Suponha $a \in \Omega$, com $f(a) = 0$ e f não nula.

Pelo princípio dos zeros isolados existe $D(a;r) \subset \Omega$ tal que f não se anula na circunferência $S(a;r)$ de centro a e raio r. Seja

$$3m = \min_{z \in S(a;r)} |f(z)|.$$

Obviamente, $m > 0$. Seja n tal que

$$|f_n - f|_{S(a;r)} \leq m.$$

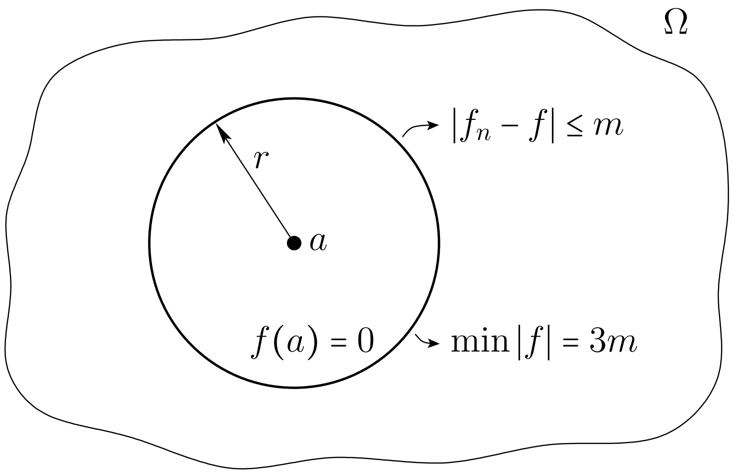

Figura 6.11: Teorema de Hurwitz (para sequências de funções)

É trivial verificar que [cheque]

$$\min_{z \in S(a;r)} |f_n(z)| \geq 2m.$$

Porém, pelo princípio do módulo máximo temos

$$|f_n(a)| = |f_n(a) - f(a)| \leq m.$$

Logo, $|f_n|$ tem um mínimo local em $B(a;r)$ e portanto f_n se anula$\lightning$

O corolário abaixo será útil na prova do Teorema da Aplicação de Riemann.

6.23 Corolário (Hurwitz). *Seja Ω um aberto conexo e $(f_n) \subset \mathcal{A}(\Omega)$ convergindo compactamente a f, com cada f_n injetora. Então, f é injetora ou constante.*

Prova. Suponhamos que f não é constante. Sejam a e b distintos em Ω.

A sequência $f_n(z) - f_n(a)$, com $n \in \mathbb{N}$, converge compactamente à função $f(z) - f(a)$ sobre $\Omega \setminus \{a\}$ e cada $f_n(z) - f_n(a)$ não se anula em $\Omega \setminus \{a\}$. Pelo Teorema de Hurwitz (6.22), em $\Omega \setminus \{a\}$ [aberto e conexo], ou temos $f(z) \equiv f(a)$ ou $f(z) - f(a)$ não se anula. Como f não é constante, temos $f(b) - f(a) \neq 0$♣

Dado $X \subset \mathbb{C}$, um conjunto L é uma vizinhança compacta de X se L é compacto e existe um aberto V tal que $X \subset V \subset L$.

6.24 Corolário (Estimativas de Cauchy sobre compactos).

Sejam Ω um aberto, K um compacto contido em Ω e L uma vizinhança compacta de K contida em Ω. Então, dado $n \in \mathbb{N}$ existe uma constante $M_n \geq 0$ (com M_n dependendo de Ω, K e L) tal que

$$|f^{(n)}|_K \leq M_n |f|_L, \ \textit{para toda} \ f \in \mathcal{A}(\Omega).$$

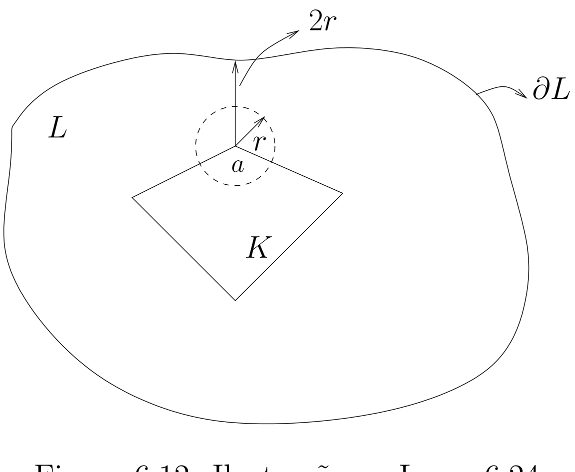

Figura 6.12: Ilustração ao Lema 6.24

Prova. Seja $2r = d(K; \partial L) > 0$.

Dado $a \in K$, temos $D(a; r) \subset L$. Pelas Desigualdades de Cauchy (6.13) segue

$$\left| \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right| \leq \frac{\max\limits_{|z-a|=r} |f(z)|}{r^n}.$$

Logo, para todo $a \in K$ temos

$$\left| f^{(n)}(a) \right| \leq \frac{n!}{r^n} |f|_L ♣$$

Apêndice 6.8 - Teorema de Montel

Em análise um princípio importante é que toda sequência limitada contém uma subsequência convergente e portanto toda sequência em um subconjunto compacto K do plano tem subsequência convergente a um ponto em K. O Teorema de Montel estende este princípio para certos conjuntos de funções.

No que segue indicamos $C(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{K} : \ f \text{ é contínua}\}$, com Ω aberto.

Uma família $\mathcal{F}$ de funções em $C(\Omega)$ é chamada normal (ou, relativamente compacta) se toda sequência em $\mathcal{F}$ contém uma subsequência convergindo compactamente a alguma função f [claramente, $f \in C(\Omega)$]. Não é exigido que o limite da subsequência pertença a $\mathcal{F}$.

6.25 Definição. *Seja Ω aberto. Uma família $\mathcal{F}$ contida em $C(\Omega)$ é*

- localmente limitada *se para todo $a \in \Omega$ existem uma bola $B(a;r)$, com $r > 0$, e um $M \geq 0$ tais que $|f(z)| \leq M$, para toda $f \in \mathcal{F}$ e para todo $z \in B(a;r)$.*
- equicontínua sobre $X \subset \Omega$ *se para todo $\epsilon > 0$ existe algum $\delta > 0$ tal que*

$$|f(z) - f(w)| < \epsilon, \ \forall \ f \in \mathcal{F} \ \textit{e} \ \forall z \ \textit{e} \ \forall w, \ \textit{ambos em } X, \ \textit{tais que } |z - w| < \delta.$$

É trivial verificar que se $\mathcal{F} \subset C(\Omega)$ é localmente limitada e K é um compacto em Ω então existe $M \geq 0$ tal que $|f(z)| \leq M$, para toda $f \in \mathcal{F}$ e para todo $z \in K$. Dizemos então que $\mathcal{F}$ é (uniformemente) limitada sobre os compactos de Ω.

6.26 Lema. *Seja $\mathcal{C} = \{B(a_n; r_m) : a_n \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \ e \ r_m \in \mathbb{Q}, r_m > 0, com\ n\ e\ m\ \in \mathbb{N}\}$. Então, todo aberto Ω em $\mathbb{R}^2$ é uma reunião de bolas na coleção $\mathcal{C}$ [e podemos supor o fecho da bola em Ω]. Isto é, $\mathcal{C}$ é uma base (enumerável) de abertos de $\mathbb{R}^2$.*

Prova. Seja $B(z;4r) \subset \Omega$, com r racional e $r > 0$.

Existe $w \in B(z;r) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ e portanto $B(w;r)$ pertence a $\mathcal{C}$. É fácil ver que $z \in B(w;r) \subset B(w;2r) \subset D(w;2r) \subset B(z;4r) \subset \Omega$. Desta forma, existem uma sequência $(a_{n_k}) \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e uma sequência $(r_{m_k}) \subset \mathbb{Q}^+$ tais que

$$\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B(a_{n_k}; r_{m_k}) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} D(a_{n_k}; 2r_{m_k}) \clubsuit \qquad (6.26.1)$$

6.27 Teorema de Montel (1912). *Seja $\mathcal{F}$ uma família em $\mathcal{A}(\Omega)$ localmente limitada, com Ω um aberto no plano complexo. Então,*

(a) $\mathcal{F}$ é equicontínua sobre cada subconjunto compacto de Ω.

(b) $\mathcal{F}$ é normal (ou, relativamente compacta).

Prova.

(a) Seja K compacto em Ω e $r > 0$ tal que $\{z : d(z;K) \le 4r\} \subset \Omega$. Como $\mathcal{F}$ é localmente limitada, $\mathcal{F}$ é uniformemente limitada sobre o compacto $K(3r) = \{z : d(z;K) \le 3r\} \subset \Omega$. Seja $M \ge 0$ tal que $|f(z)| \le M$ para toda $f \in \mathcal{F}$ e para todo z em $K(3r)$.

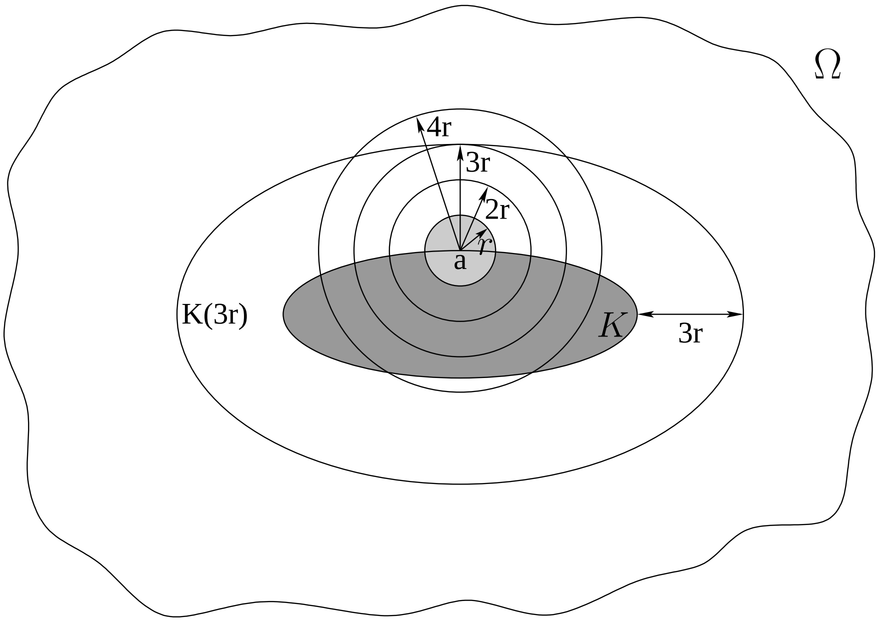

Figura 6.13: Prova do Teorema de Montel

Sejam a e $a + h$, ambos em K, com $|h| < r$. A série de Taylor de uma $f \in \mathcal{F}$ em torno do ponto a, denotada por $f(z) = \sum a_n(z-a)^n$, converge no disco $D(a;3r)$ [vide teorema de Hurwitz (6.15) para séries de potências] e

$$|f(a+\zeta) - f(a)| \;=\; \left|\sum_{n\ge1} a_n\zeta^n\right| \;\le\; |\zeta| \sum_{n\ge1} n|a_n||\zeta|^{n-1}, \text{ se } |\zeta| \le 2r.$$

Como $f'(a+\zeta) = \sum na_n\zeta^{n-1}$, pelas desigualdades de Cauchy (6.19) segue

$$n|a_n|\,(2r)^{n-1} \le \max_{D(a;2r)} |f'| \le \frac{M}{3r-2r} = \frac{M}{r}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Desta forma encontramos, observando que $|h|/2r \leq 1/2$,

$$|f(a+h)-f(a)| \;\leq\; |h| \sum n|a_n|(2r)^{n-1}\left(\frac{|h|}{2r}\right)^{n-1} \leq |h|\,\frac{M}{r}\sum\left(\frac{|h|}{2r}\right)^{n-1} \leq |h|\frac{2M}{r}.$$

(b) Dividamos em duas partes.

- Seja $(f_\nu)_{\mathbb{N}}$ uma sequência qualquer em $\mathcal{F}$. Dado a qualquer em Ω, sejam um raio $r = r(a) > 0$ e uma constante M tais que $D(a;r) \subset \Omega$ e

$$|f_\nu(z)| \leq M, \text{ para todos } \nu \in \mathbb{N} \text{ e } z \in D(a;r).$$

Indicando $c_n[f_\nu] = \frac{f_\nu^{(n)}(a)}{n!}$, pela desigualdade de Cauchy temos

$$|\,c_n[f_\nu]\,| \;\leq\; \frac{M}{r^n}, \text{ para todos } \nu \in \mathbb{N} \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

A seguir, aplicamos o método da diagonalização de Cantor.

A sequência de coeficientes $(c_0[f_\nu])_{\nu\in\mathbb{N}}$ é limitada e existe uma subsequência $\{f_{00}, f_{01}, f_{02}, \ldots,\}$ de $(f_\nu)_{\mathbb{N}}$ tal que a sequência numérica $\big(c_0[f_{0k}]\big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a C_0 se $k \to +\infty$.

Por indução obtemos uma subsequência $\{f_{\nu+1,0}, f_{\nu+1,1}, f_{\nu+1,2}, \ldots\}$ de $\{f_{\nu 0}, f_{\nu 1}, f_{\nu 2}, \ldots\}$ tal que $\big(c_{\nu+1}[f_{\nu+1,k}]\big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $C_{\nu+1}$ se $k \to +\infty$.

$$\begin{array}{ccccl} \mathbf{f_{00}} & f_{01} & f_{02} & \cdots & c_0[f_{0k}] \longrightarrow C_0 \in \mathbb{C} \\ f_{10} & \mathbf{f_{11}} & f_{12} & \cdots & c_1[f_{1k}] \longrightarrow C_1 \in \mathbb{C} \\ f_{20} & f_{21} & \mathbf{f_{22}} & \cdots & c_2[f_{2k}] \longrightarrow C_2 \in \mathbb{C} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{array}$$

Logo, $(g_n) = (f_{nn})$ é subsequência de (f_ν) e, se $N \in \mathbb{N}$ e $z \in D(a;r/2)$,

$$(6.27.1) \quad |g_k(z)-g_l(z)| \;\leq\; \sum_{n\leq N}\Big|c_n[g_k]-c_n[g_l]\Big||z-a|^n \;+\; \sum_{n>N}\frac{2M}{r^n}|z-a|^n.$$

Seja $\epsilon > 0$. A última parcela no lado direito de (6.27.1) é majorada por

$$\sum_{n>N} 2M\Big(\frac{1}{2}\Big)^n = \frac{M}{2^{N-1}} < \frac{\epsilon}{2} \text{ se } N \geq N_0, \text{ com } N_0 \text{ grande o suficiente.}$$

Fixo $N = N_0$, a primeira parcela (um somatório finito) no lado direito de (6.27.1) é majorada por

$$\sum_{n\leq N_0}\Big|c_n[g_k]-c_n[g_l]\Big|\left(\frac{r}{2}\right)^n < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{para todos } k, l \geq k_0,$$

com k_0 grande o suficiente, pois $c_n[g_k] = c_n[f_{kk}] \to C_k$ se $k \to +\infty$, para todo n. Assim, $(g_n) = (f_{nn})$ converge uniformemente em $D(a;r/2)$.

$\diamond$ Seja $(f_\nu)_{\mathbb{N}}$ uma sequência qualquer em $\mathcal{F}$.

Pela identidade (6.26.1) existe uma sequência $(a_\nu)_{\mathbb{N}} \subset \Omega$ tal que

$$\Omega = \bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} B(a_\nu; r_\nu) = \bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} D(a_\nu; 2r_\nu), \quad r_\nu > 0.$$

Já vimos que existe uma subsequência $(h_{0n})_{n\in\mathbb{N}}$ de (f_n) que converge uniformemente em $D(a_0; r_0)$. Por indução determinamos uma subsequência $(h_{\nu+1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(h_{\nu,n})_{n\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente em $D(a_{\nu+1}; r_{\nu+1})$. Temos o diagrama

$$\begin{array}{cccccc}
\mathbf{h_{00}} & h_{01} & h_{02} & \ldots & (h_{0k}) \text{ converge em } D(a_0; r_0) \\
h_{10} & \mathbf{h_{11}} & h_{12} & \ldots & (h_{1k}) \text{ converge em } D(a_1; r_1) \\
h_{20} & h_{21} & \mathbf{h_{22}} & \ldots & (h_{2k}) \text{ converge em } D(a_2; r_2) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & .
\end{array}$$

É claro que $(h_n) = (h_{nn})$ converge uniformemente em cada disco $D(a_\nu; r_\nu)$.

Por fim, se K é um compacto contido em Ω, existe um índice $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$K \subset B(a_1; r_1) \cup \cdots \cup B(a_p; r_p)$$

e (h_n) converge uniformemente em

$$D(a_1; r_1) \cup \cdots \cup D(a_p; r_p) \ \supset K \clubsuit$$

Exercício. Prove o item (a) do Teorema de Montel utilizando o Lema de Schwarz [a prova fica mais curta (mas não mais simples) que a apresentada acima].

6.28 Critério (de Montel). *Seja $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(\Omega)$ uma sequência localmente limitada em Ω. Se toda subsequência de $\{f_\nu\}$ que converge compactamente em Ω, converge para $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ então $\{f_\nu\}$ converge compactamente a f em Ω.*

Prova.

Por contradição. Suponhamos existir K compacto em Ω tal que

$$|f_n - f|_K \nrightarrow 0, \text{ se } n \to +\infty .$$

Então, existe $\epsilon > 0$ e uma subsequência (f_{n_j}) de (f_n) tal que

$$|f_{n_j} - f|_K \geq \epsilon\,, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}\ .$$

Como (f_{n_j}) é também localmente limitada, pelo Teorema de Montel existe uma subsequência (φ_{n_j}) de (f_{n_j}) que converge compactamente em Ω a uma função φ. Devido às hipóteses temos $\varphi = f$, com $|\varphi_{n_j} - f|_K \geq \epsilon$, para todo j ↯

6.29 Teorema (Vitali). *Seja Ω conexo, $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}(\Omega)$ localmente limitada e*

$$A = \ \{\omega \in \Omega : \ \textit{existe} \lim_{n\to+\infty} f_n(\omega) \in \mathbb{C}\}.$$

SeA tem ponto de acumulação em Ω então $\{f_n\}$ converge compactamente em Ω.

Prova.

Pelo Critério de Montel basta mostrar que o limite das subsequências compactamente convergentes é único. Sejam $\{f_{n_j}\}$ e $\{f_{n_k}\}$ duas tais subsequências convergindo às funções φ e ψ, respectivamente. Pelo Corolário 6.21, as funções φ e ψ são analíticas. Temos ainda, $\varphi = \psi$ em A, sendo A um conjunto com ponto de acumulação em Ω, com Ω conexo. Consequentemente, pelo Princípio de Identidade para funções analíticas segue $\varphi = \psi$ ♣