

MAT 225 - FUNÇÕES ANALÍTICAS

Instituto de Matemática e Estatística da USP

Ano 2015

Professor Oswaldo R. B. de Oliveira

<http://www.ime.usp.br/~oliveira> oliveira@ime.usp.br

Capítulo 11 - Aplicações da Integração Complexa

- 11.1 - A Expansão de Laurent e a Classificação de Singularidades.
- 11.2 - Resíduos em pontos do plano.
- 11.3 - Resíduos no ponto ∞ .
- 11.4 - Princípio do Argumento para Funções Meromorfas.
- 11.5 - Cálculo de Integrais.
- 11.6 - Transformada de Fourier.

Capítulo 1

NÚMEROS COMPLEXOS

Capítulo 2

TOPOLOGIA DO PLANO \mathbb{C}

Capítulo 3

POLINÔMIOS

Capítulo 4

SÉRIES E SOMABILIDADE

Capítulo 5

SÉRIES DE POTÊNCIAS

Capítulo 6

FUNÇÕES ANALÍTICAS

Capítulo 7

EXPONENCIAL, ÍNDICE, PRINCÍPIO DO ARGUMENTO E TEOREMA DE ROUCHÉ

Capítulo 8

TEOREMA DE CAUCHY HOMOTÓPICO E LOGARITMO

Capítulo 9

TEOREMA E ESFERA DE RIEMANN E APLICAÇÕES CONFORMES

Capítulo 10

INTEGRAÇÃO COMPLEXA

Capítulo 11

APLICAÇÕES DA INTEGRAÇÃO COMPLEXA

11.1 - A Expansão de Laurent e a Classificação das Singularidades

Uma série de Laurent com centro ζ e coeficientes a_n , com $n \in \mathbb{Z}$, é do tipo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-\zeta)^n = \dots + \frac{a_{-2}}{(z-\zeta)^2} + \frac{a_{-1}}{z-\zeta} + a_0 + a_1(z-\zeta) + a_2(z-\zeta)^2 + \dots$$

As séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-\zeta)^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-\zeta)^{-n}$$

são ditas, respectivamente, **parte regular** e **parte principal** da série de Laurent, a qual é convergente no ponto z se as partes regular e principal convergem em z .

A soma de uma série de Laurent é

$$(11.1.1) \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-\zeta)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-\zeta)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-\zeta)^n,$$

nos pontos z em que suas partes regular e principal convergem. A parte regular é uma série de potências e indicamos seu raio de convergência por R_1 . Por outro lado, a parte principal é a série de potências

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}w^n, \quad \text{em } w = \frac{1}{z-\zeta},$$

com raio de convergência ρ_2 indicado por

$$\frac{1}{R_2} \quad [\text{com } R_2 = +\infty \text{ se } \rho_2 = 0 \text{ e } R_2 = 0 \text{ se } \rho_2 = +\infty].$$

Notemos que se $R_2 = +\infty$, a parte principal diverge para todo $z \in \mathbb{C}$.

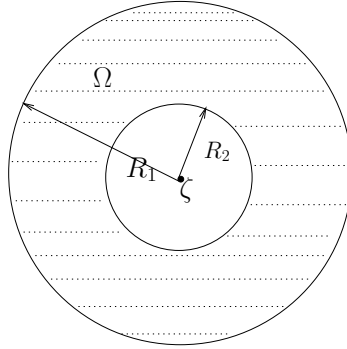


Figura 11.1: Anel de Convergência de uma série de Laurent

11.1 Lema (Propriedades da série de Laurent). *Mantenhamos a notação acima. Suponhamos $R_2 < R_1$.*

(a) *A série de Laurent*

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n(z - \zeta)^n$$

converge uniforme e absolutamente nos compactos no anel de convergência

$$\Omega = A(\zeta; R_2; R_1) = \{z \in \mathbb{C} : R_2 < |z - \zeta| < R_1\}.$$

(b) *A função*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n(z - \zeta)^n, \text{ onde } z \in \Omega,$$

é derivável termo a termo e

$$f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} n a_n(z - \zeta)^{n-1}.$$

(c) *Seja $\gamma(\theta) = \zeta + r e^{i\theta}$, com $\theta \in [0, 2\pi]$ e $R_2 < r < R_1$. Então temos*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - \zeta)^{n+1}} dz, \text{ para todo } n \text{ em } \mathbb{Z}.$$

Prova.

(a) Sejam r_1 e r_2 tais que $R_2 < r_2 < r_1 < R_1$. Então,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - \zeta)^n \text{ converge uniforme e absolutamente em } \{z : |z - \zeta| \leq r_1\} \\ \text{e} \\ \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} w^n \text{ converge uniforme e absolutamente em } \{w : |w| \leq \frac{1}{r_2} < \frac{1}{R_2}\}. \end{array} \right.$$

No compacto $\{z : r_2 \leq |z - \zeta| \leq r_1\}$ as séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - \zeta)^n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z - \zeta)^{-n}$ convergem absoluta e uniformemente e assim, a série de Laurent também .

- (b) Trivial, pois a parte regular é uma série de potências ao passo que a parte principal é uma série de potências composta com a função holomorfa

$$\frac{1}{z - \zeta}.$$

Solicito ao leitor verificar.

- (c) Dado $n \in \mathbb{Z}$ temos

$$\frac{f(z)}{(z - \zeta)^{n+1}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (z - \zeta)^{k-n-1},$$

com $\text{Imagem}(\gamma)$ uma circunferência (compacta) na coroa circular $A(\zeta; R_2; R_1)$ e a série de Laurent convergindo uniformemente sobre $\text{Imagem}(\gamma)$. Logo,

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - \zeta)^{n+1}} dz = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \oint_{\gamma} (z - \zeta)^{k-n-1} dz = a_n 2\pi i \clubsuit$$

11.2 Teorema (A Expansão de Laurent). *Consideremos a coroa circular*

$$\Omega = \{z : \rho_1 < |z - \zeta| < \rho_2\} \text{ e } f \in \mathcal{H}(\Omega).$$

Então, existem duas seqüências $(b_m)_{m \geq 1}$ e $(a_n)_{n \geq 0}$, de números em \mathbb{C} , tais que

$$f(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{b_m}{(z - \zeta)^m} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - \zeta)^n, \text{ para todo } z \in \Omega.$$

Ainda, a expansão em uma série de Laurent da função f é única.

Prova.

Pelo Lema 11.1 basta provar que existe uma série de Laurent para f , em Ω . A unicidade segue do Lema 11.1 (c). A seguir, representamos f via Fórmula Integral de Cauchy e então expandimos o integrando em séries.

Fixado um ponto z na coroa $\Omega = \{z : \rho_1 < |z - \zeta| < \rho_2\}$, sejam $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ tais que

$$\rho_1 < r_1 < |z - \zeta| < r_2 < \rho_2.$$

A fronteira da coroa “interior”

$$\{z : r_1 < |z - \zeta| < r_2\}$$

é dada pelas circunferências: γ_1 e γ_2 , de raios r_1 e r_2 , respectivamente, que orientamos no sentido anti-horário.

O ciclo $\gamma_2 - \gamma_1$ é homólogo a 0 em Ω [cheque].

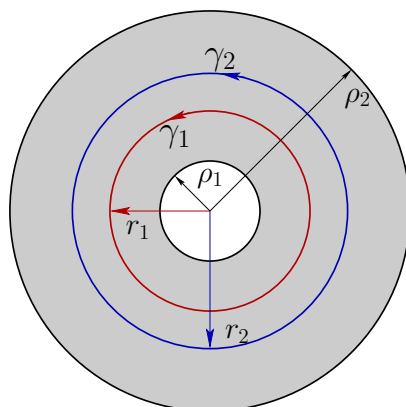


Figura 11.2: A expansão de Laurent em um anel

Pela Fórmula Integral de Cauchy (homológica) obtemos,

$$(11.2.1) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dz.$$

No Teorema 10.13 mostramos que a expansão em séries de potências

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w-\zeta)^{n+1}} dw \right) (z-\zeta)^n,$$

é absolutamente convergente se $|z-\zeta| < r_2$.

A prova da expansão

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{b_m}{(z-\zeta)^m}, \text{ com } b_m \text{ em } \mathbb{C},$$

é análoga à prova da expansão no Teorema 10.13 [cheque, vide Lema 11.1(a)] ♣

Comentário. Não é necessário o teorema de Cauchy homológico na prova acima. De fato, considerando um diâmetro do círculo $\{z : |z-\zeta| = r_2\}$, com o diâmetro não contendo o ponto z , é trivial escrever o lado direito de (11.2.1) como soma de duas integrais, a primeira sobre uma curva fechada η_1 tal que $\text{Ind}(\eta_1; z) = 1$ [logo, z no interior de η_1] e a segunda sobre uma curva fechada η_2 tal que $\text{Ind}(\eta_2; z) = 0$ [isto é, z no exterior de η_2]. Então, pela fórmula integral de Cauchy (teorema 10.11) segue a identidade (11.2.1). Por favor, cheque (esboce a figura apropriada).

11.3 Definição. *Seja Ω um aberto em \mathbb{C} e $\zeta \in \Omega$. Se $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{\zeta\})$, dizemos que f tem uma singularidade isolada em ζ .*

Seja ζ uma singularidade isolada de f . Pelo Teorema 11.2, em uma bola “reduzida”

$$B^*(\zeta; \rho) = B(\zeta; \rho) \setminus \{\zeta\}$$

contida em Ω , a função f é dada por

$$f(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{b_m}{(z-\zeta)^m} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-\zeta)^n,$$

e classificamos as singularidades isoladas em três tipos distintos:

- ζ é singularidade removível de f se $b_m = 0$, para todo $m \geq 1$.
- ζ é polo de ordem (multiplicidade) $k \geq 1$ se $b_k \neq 0$ e $b_m = 0$ para todo $m > k$.

Notação: a valuação de f no polo ζ é

$$\boxed{\nu(f; \zeta) = -k.}$$

- ζ é singularidade essencial de f se $\{m \in \mathbb{N} : b_m \neq 0\}$ é infinito.

Comentário. Se $b_m = 0$, para todo $m \geq 1$, dizemos que ζ é singularidade removível pois definindo $f(\zeta) = a_0$ obtemos uma extensão de f (ainda denotada f) que é holomorfa em Ω .

11.4 Teorema (Remoção de singularidades, Riemann). *Seja ζ uma singularidade isolada de $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{\zeta\})$. São equivalentes as afirmações abaixo.*

- (a) ζ é singularidade removível.
- (b) f admite uma extensão holomorfa ao aberto Ω .
- (c) f admite uma extensão contínua ao aberto Ω .
- (d) Existe $\lim_{z \rightarrow \zeta} f(z)$.
- (e) f é limitada em alguma bola reduzida $B^*(\zeta; r) = B(\zeta; r) \setminus \{\zeta\}$, com $r > 0$.
- (f) Temos $\lim_{z \rightarrow \zeta} (z - \zeta)f(z) = 0$.

Prova.

(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e) \Rightarrow (f). Trivial.

(f) \Rightarrow (a). Podemos supor $\zeta = 0$ [cheque] e $D(0; r) \subset \Omega$, com $r > 0$.

Com a notação na Definição 11.3 temos

$$zf(z) = \left(\dots + \frac{b_3}{z^2} + \frac{b_2}{z} \right) + (b_1 + a_0z + a_1z^2 + \dots), \text{ se } 0 < |z| \leq r.$$

Pela hipótese sobre $zf(z)$ e por continuidade, existe $M > 0$ tal que

$$|zf(z)| \leq M \text{ se } 0 < |z| \leq r \quad \text{e} \quad |b_1 + a_0z + a_1z^2 + \dots| \leq M \text{ se } |z| \leq r.$$

A desigualdade triangular garante

$$\left| \dots + \frac{b_3}{z^2} + \frac{b_2}{z} \right| \leq 2M, \text{ se } 0 < |z| \leq r.$$

Pela desigualdade de Gutzmer-Parseval (6.12) segue

$$\left(\frac{|b_2|^2}{|z|^2} + \frac{|b_3|^2}{|z|^4} + \dots \right) \leq 4M^2, \text{ se } 0 < |z| \leq r.$$

Donde segue $b_m = 0$ se $m \geq 2$. Por fim,

$$0 = \lim_{z \rightarrow 0} zf(z) = \lim_{z \rightarrow 0} (b_1 + a_0z + a_1z^2 + a_2z^3) = b_1 \spadesuit$$

Exercício. Prove o teorema acima utilizando a fórmula para os coeficientes da série de Laurent, dada no Lema 11.1(c). Ainda, leia a prova (uma terceira prova) em W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3rd. ed., p. 210.

11.5 Corolário. *Mantendo as notações acima para uma série de Laurent, se $b_m \neq 0$ para algum $m \geq 1$ então $|f|$ é ilimitado em qualquer bola reduzida $B^*(\zeta; r)$.*

11.6 Proposição. *Seja $f \in \mathcal{H}(B^*(\zeta; r))$. Então,*

(a) ζ é um polo de ordem k de f se e somente se

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} (z - \zeta)^k f(z) \in \mathbb{C}^*.$$

(b) Se ζ é um polo de f então

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} |f(z)| = \infty.$$

Prova.

(a) (\Rightarrow) Temos,

$$f(z) = \frac{b_k}{(z-\zeta)^k} + \dots + \frac{b_1}{z-\zeta} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-\zeta)^n, \quad b_k \neq 0, \quad e$$

$$(z-\zeta)^k f(z) = b_k + b_{k-1}(z-\zeta) + \dots + b_1(z-\zeta)^{k-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-\zeta)^{n+k}.$$

Logo,

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} (z-\zeta)^k f(z) = b_k \neq 0.$$

(\Leftarrow) Se

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} (z-\zeta)^k f(z) = \beta \in \mathbb{C}^*,$$

pela Proposição 11.4 o ponto ζ é uma singularidade removível da função

$$(z-\zeta)^k f(z).$$

Desta forma encontramos

$$(z-\zeta)^k f(z) = \beta + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n (z-\zeta)^n \quad \text{em } B^*(\zeta; r), \quad \text{para algum } r > 0.$$

Donde,

$$f(z) = \frac{\beta}{(z-\zeta)^k} + \frac{c_1}{(z-\zeta)^{k-1}} + \dots + \frac{c_{k-1}}{z-\zeta} + \sum_{n=k}^{+\infty} c_n (z-\zeta)^{n-k}, \quad \beta \neq 0,$$

o que mostra que ζ é um polo de ordem k .

(b) Se ζ é um polo de ordem k , por (a) temos

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} (z-\zeta)^k f(z) \neq 0.$$

Logo,

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} |f(z)| = \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{|(z-\zeta)^k f(z)|}{|z-\zeta|^k} = \infty \clubsuit$$

Os polos de ordem 1, 2 e 3 são ditos polos simples, duplos e triplos, respectivamente.

Seguem algumas definições úteis ao estudo de funções holomorfas que “assumem” o valor infinito ∞ e também funções holomorfas em uma vizinhança do infinito. Tais definições preparam o caminho para o estudo de funções holomorfas definidas na esfera de Riemann e com valores na esfera de Riemann.

- Dizemos que f é meromorfa no aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se f é holomorfa em

$$\Omega \setminus P,$$

onde P é um subconjunto discreto do aberto Ω e constituído de polos de f .

Notação. Dado Ω um aberto de \mathbb{C} , escrevemos

$$\mathcal{M}(\Omega) = \{f : f \text{ é meromorfa em } \Omega\}.$$

- Sejam f e P como acima. Se $\zeta \in P$, então existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$(z - \zeta)^m f(z)$$

é holomorfa numa vizinhança de ζ . Logo, em uma bola reduzida centrada em ζ , a função f é o quociente de duas funções holomorfas.

- Dizemos que f é meromorfa em um ponto ζ se f é meromorfa em um aberto contendo ζ .
- Pode ser provado (o resultado é profundo) que toda função meromorfa é quociente de duas funções analíticas [vide Real and Complex Analysis, W. Rudin, ed. 3, Theorema 15.12, p. 304].

11.7 Teorema (Casorati-Weierstrass). *Se ζ é singularidade essencial de f , então $f(B^*(\zeta; r))$ é denso em \mathbb{C} , para todo $r > 0$ e pequeno o suficiente.*

Prova.

Seja $r > 0$ tal que $B^*(\zeta; r)$ está contida no domínio de f .

Suponhamos, por contradição, que existe $B(w; \epsilon)$, com $\epsilon > 0$, tal que

$$f(B^*(\zeta; r)) \cap B(w; \epsilon) = \emptyset.$$

Então temos:

$$|f(z) - w| \geq \epsilon \text{ para todo } z \in B^*(\zeta; r),$$

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w} \in \mathcal{H}(B^*(\zeta; r)) \quad \text{e} \quad |g(z)| \leq \frac{1}{\epsilon}, \text{ para todo } z \in B^*(\zeta; r).$$

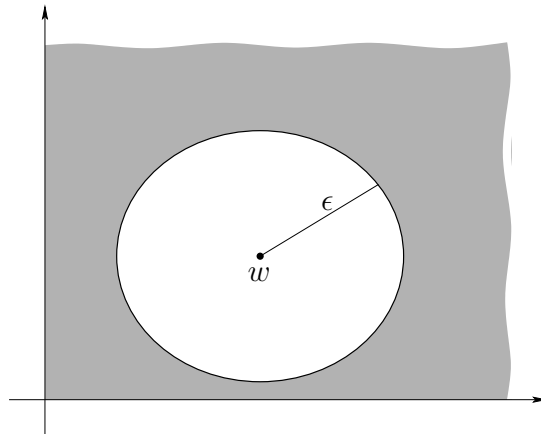


Figura 11.3: Casorati-Weierstrass

Pela Proposição 11.4, segue que o ponto ζ é uma singularidade removível da função g e existe

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} g(z).$$

Se $g(\zeta) = 0$, como temos $g(z) \neq 0$ se $z \neq \zeta$, segue que ζ é um zero de ordem maior ou igual a 1 de g e então, pela equação

$$f - w = \frac{1}{g},$$

concluimos que ζ é um polo de f , contra a hipótese.

Se $g(\zeta) \neq 0$, então a função

$$f(z) = w + \frac{1}{g} \text{ é holomorfa } \nabla$$

Comentário. O Teorema de Casorati-Weierstrass é uma versão fraca do “Teorema grande de Picard: se f tem uma singularidade essencial em ζ , então

$$f(B^*(\zeta; r)) \text{ é } \mathbb{C} \text{ ou é } \mathbb{C} \text{ menos um ponto.}''$$

Não provaremos este resultado neste curso.

Seja $m \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$. Dada g holomorfa no ponto ζ , com $g(\zeta) \neq 0$, então a função

$$f(z) = (z - \zeta)^{-m} g(z) \text{ tem um polo de ordem } m \text{ em } \zeta.$$

Devido a tal observação, dizemos que um polo é um zero de ordem negativa.

11.8 Definição. Dizemos que f tem uma singularidade isolada em ∞ se f é analítica em

$$\{z : |z| > r\} \text{ [uma vizinhança de } \infty \text{] para algum } r \geq 0.$$

Neste caso, a função

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

tem uma singularidade isolada em 0.

- O tipo de singularidade (removível, polo ou essencial) de f em ∞ é o tipo de singularidade (removível, polo ou essencial) de g em 0.
- A função f é meromorfa (respectivamente, holomorfa) em ∞ se a função g é meromorfa (respectivamente, holomorfa) em 0.
- A ordem de f em ∞ é a ordem de g em 0.

Seja F holomorfa em \mathbb{C} , exceto um conjunto (contável) de singularidades isoladas.

- A função F é dita meromorfa na esfera de Riemann S^2 (isto é, o plano estendido $\overline{\mathbb{C}}$) se F é meromorfa em \mathbb{C} e no ponto ∞ .
- A função F é holomorfa em $S^2 \equiv \overline{\mathbb{C}}$ se F é holomorfa em \mathbb{C} e no ponto ∞ .

Comentários. Por favor, verifique as afirmações abaixo.

- Se uma função f tem uma singularidade removível no infinito, então f é limitada em uma vizinhança de ∞ . Assim, pelo teorema de Liouville, se uma função inteira tem uma singularidade removível no infinito então tal função é constante.
- Um polinômio complexo $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ e de grau $n \geq 1$ é uma função racional com polo no infinito.
- Toda função racional é meromorfa no plano estendido $\overline{\mathbb{C}}$.
- Uma função racional cujo único polo é ∞ é um polinômio.

De forma mais geral, consideremos um aberto Ω na esfera de Riemann S^2 .

- Uma função G é dita meromorfa em Ω se G é analítica em Ω , exceto um conjunto (contável) de singularidades isoladas, com todas elas polos.

Comentários. Por favor, cheque as afirmações abaixo sobre funções meromorfas.

- Somas e produtos de meromorfas são meromorfas. Quocientes de meromorfas são meromorfas, se o denominador não é a função nula.

Exercício. Verifique as afirmações abaixo.

- (a) Se f é holomorfa em \mathbb{C} e tem um polo em ∞ , então f é um polinômio.
- (b) Toda função meromorfa no plano estendido $\overline{\mathbb{C}}$ é racional.

Esboço da solução de (b). O conjunto $S = \{z_1, \dots, z_n, \infty\}$ de singularidades é finito, pois ∞ é singularidade isolada. Se o conjunto Z_f de zeros é infinito, então $f(1/z)$ se anula numa vizinhança de 0. Pelo PZI, segue $f \equiv 0$ em \mathbb{C} . Segue o caso $Z_f = \{w_1, \dots, w_m\}$. Seja p_j a ordem do polo z_j e q_j a ordem do zero w_j . Então

$$F(z) = \frac{(z - z_1)^{p_1} \dots (z - z_n)^{p_n} f(z)}{(z - w_1)^{q_1} \dots (z - w_m)^{q_m}} \text{ é holomorfa em } \mathbb{C}.$$

Claramente [cheque] ∞ não é singularidade essencial de F . Logo, ∞ é polo ou singularidade removível. Assim, F é constante ou um polinômio.

11.2 - Resíduos em pontos do plano

Dados r e R , com $0 \leq r < R$, utilizemos a notação

$$A(\zeta; r; R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - \zeta| < R\}$$

para anel circular, ou anel, ou coroa circular (aberta), de centro ζ e raios r e R

11.9 Definição. *Seja f holomorfa no anel $A(\zeta; 0; r)$. O resíduo de f em ζ é o coeficiente b_1 da série de Laurent de f com centro ζ . Indicamos*

$$b_1 = \text{Res}(f, \zeta).$$

Dada uma circunferência $\gamma(\theta) = \zeta + \delta e^{i\theta}$, para $\theta \in [0, 2\pi]$ e com $0 < \delta < r$ e então orientada no sentido anti-horário, pelo Lema 11.1(c) segue

$$(11.9.1) \quad \oint_{\gamma} f dz = 2\pi i \text{Res}(f, \zeta).$$

11.10 Teorema dos Resíduos. *Seja f holomorfa em $\Omega \setminus S$, com S o conjunto das singularidades isoladas de f em Ω . Seja Γ um ciclo em $\Omega \setminus S$ e homólogo a 0 em Ω . Então,*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(w)dw = \sum_{\zeta \in S} \text{Ind}_{\Gamma}(\zeta) \text{Res}(f; \zeta).$$

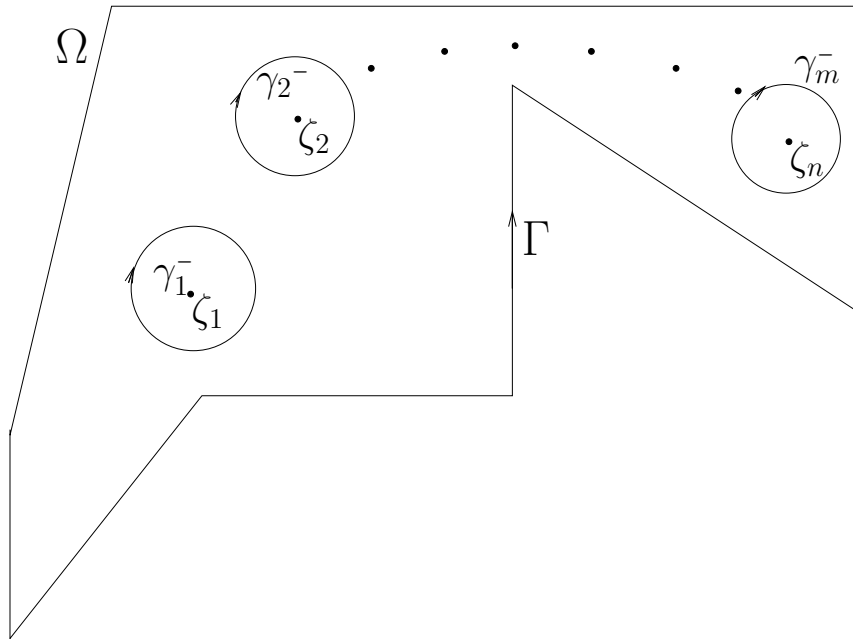


Figura 11.4: Ilustração ao Teorema dos Resíduos

Prova.

Sejam

$$I(\Gamma) = \{z : \text{Ind}(\Gamma; z) \neq 0\} \quad \text{e} \quad E(\Gamma) = \{z : \text{Ind}(\Gamma; z) = 0\}.$$

Como Γ é homólogo a 0 em Ω , então $I(\Gamma)$ está contido em Ω .

◇ O somatório dos resíduos é finito. Temos que

$$S^* = \{\zeta \in S : \text{Ind}(\Gamma; \zeta) \neq 0\}$$

está contido no compacto $I(\Gamma) \cup \text{Imagem}(\Gamma)$ [cheque, vide Definição 7.16] contido em Ω . Já que S não tem ponto de acumulação em Ω , concluímos que S^* é finito.

Escrevamos

$$S^* = \{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}.$$

Para cada $j = 1, \dots, n$, seja γ_j a fronteira de um disco (não degenerado) fechado centrado em ζ_j e contido em Ω , orientada no sentido anti-horário. Assumamos que os discos são disjuntos. Seja

$$m_j = \text{Ind}(\Gamma; \zeta_j).$$

◇ As cadeias Γ e $\sum_{j=1}^n m_j \gamma_j$ são homólogas em $\Omega \setminus S$.

De fato, dado um ponto α em $\Omega^c = \mathbb{C} \setminus \Omega$ temos

$$\text{Ind}(\Gamma; \alpha) = 0 \quad \text{e} \quad \text{Ind}(\gamma_j; \alpha) = 0 \quad \text{para todo } j = 1, \dots, n.$$

Se $\alpha = \zeta_k$ para algum $k \in \{1, \dots, n\}$ então

$$\text{Ind}(\Gamma; \alpha) = m_k \quad \text{e} \quad \text{Ind}\left(\sum_{j=1}^n m_j \gamma_j; \alpha\right) = m_k.$$

Pelo Teorema de Cauchy Homológico 10.17 e a fórmula (11.9.1) temos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f dz &= \sum_{j=1}^n m_j \int_{\gamma_j} f dz \\ &= 2\pi i \sum_{j=1}^n m_j \text{Res}(f; \zeta_j) \clubsuit \end{aligned}$$

Frequentemente, em aplicações, o aberto Ω é simplesmente conexo. Neste caso, toda curva fechada é homóloga a 0 em Ω e a hipótese sobre Γ é supérflua. Geralmente, Ω é uma bola ou um retângulo.

Recordemos que uma função f é holomorfa em um ponto a se f é holomorfa numa vizinhança de a .

11.11 Lema (Propriedades Operatórias para Resíduos).

- Seja a uma singularidade isolada da função holomorfa f .

(R1) Se a é singularidade removível, então

$$\text{Res}(f, a) = 0.$$

(R2) Se a é um polo de ordem 1, então

$$\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z).$$

(R3) Se a é um polo de ordem $k > 1$, então

$$\text{Res}(f, a) = \frac{g^{k-1}(a)}{(k-1)!}, \quad \text{onde } g(z) = (z-a)^k f(z).$$

- Sejam f e g holomorfas em a , com a um zero simples de g .

(R4) Temos,

$$\text{Res}\left(\frac{f}{g}, a\right) = \frac{f(a)}{g'(a)}.$$

(R5) Temos,

$$\text{Res}\left(\frac{1}{g}, a\right) = \frac{1}{g'(a)}.$$

- (Resíduo Fracionário) Seja a um polo simples de f . Seja γ_ϵ^α um arco de circunferência de ângulo α contida na circunferência de centro a e raio $\epsilon > 0$, orientada no sentido anti-horário, $\{z : |z - a| = \epsilon\}$.

(R6) Temos,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\gamma_\epsilon^\alpha} f(z) dz = \alpha i \text{Res}(f, a).$$

Prova.

(R1) Trivial.

(R2) A série de Laurent de f no anel $A(a; 0; \rho)$ é

$$f(z) = \frac{b_1}{z-a} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) &= \lim_{z \rightarrow a} \left(b_1 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - a)^{n+1} \right) \\ &= b_1 \\ &= \text{Res}(f, a).\end{aligned}$$

(R3) Neste caso temos

$$f(z) = \frac{b_k}{(z - a)^k} + \dots + \frac{b_1}{z - a} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - a)^n.$$

Então,

$$g(z) = b_k + b_{k-1}(z - a) + \dots + b_1(z - a)^{k-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - a)^{n+k}$$

é uma série de potências. Logo, pela Fórmula de Taylor para os coeficientes,

$$b_1 = \frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}.$$

(R4) Devido às hipótese temos, para $|z - a| < r$, com $0 < r$ e r pequeno o suficiente,

$$\begin{cases} f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n + \dots, \\ g(z) = g'(a)(z - a) + \dots + \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n + \dots, \quad g'(a) \neq 0. \end{cases}$$

Logo, para $0 < |z - a| < r$ temos,

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{1}{z - a} \left[\frac{f(a) + f'(a)(z - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n + \dots}{g'(a) + \frac{g''(a)}{2!}(z - a) + \dots + \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^{n-1} + \dots} \right].$$

Pelas regras operatórias para séries de potências, existe $\rho > 0$, $\rho < r$, tal que

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{1}{z - a} \left[\frac{f(a)}{g'(a)} + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \dots \right], \quad \text{se } 0 < |z - a| < \rho.$$

Donde segue

$$\text{Res}\left(\frac{f}{g}, a\right) = \frac{f(a)}{g'(a)}.$$

[Uma prova breve (e menos transparente) de (R4), segue da Prop. 11.6 (a).]

(R5) Imediato de (R4).

(R6) Escrevamos

$$\begin{cases} f(z) = \frac{b_1}{z-a} + g(z), \\ \text{com } g \in \mathcal{H}(B(a; r)), \text{ para algum } r > 0. \end{cases}$$

Encontramos

$$\int_{\gamma_\epsilon^\alpha} f(z) dz = b_1 \int_{\gamma_\epsilon^\alpha} \frac{dz}{z-a} + \int_{\gamma_\epsilon^\alpha} g(z) dz.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_\epsilon^\alpha} \frac{dz}{z-a} &= \int_{\theta_0}^{\theta_0+\alpha} \frac{i\epsilon e^{i\theta}}{\epsilon e^{i\theta}} d\theta \\ &= \alpha i. \end{aligned}$$

Por outro lado, como a função g é contínua e portanto limitada por alguma constante $M > 0$ em uma vizinhança de a , pela Estimativa M-L segue

$$\left| \int_{\gamma_\epsilon^\alpha} g(z) dz \right| \leq M\alpha\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0.$$

Assim,

$$\int_{\gamma_\epsilon^\alpha} f(z) dz \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} i\alpha b_1.$$

Recordemos que por definição temos $b_1 = \text{Res}(f, a)$.

Portanto, provamos que

$$\int_{\gamma_\epsilon^\alpha} f(z) dz \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} i\alpha \text{Res}(f, a).$$

A prova do Lema 11.11 está completa♣

11.3 - Resíduos no ponto ∞

Seja f holomorfa em $\mathbb{C} \setminus D(0; r)$, onde $r > 0$. Então, a função

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right), \text{ onde } 0 < |z| < \frac{1}{r},$$

é analítica e tem uma singularidade na origem. Seja

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z^n = \dots + \frac{b_{-2}}{z^2} + \frac{b_{-1}}{z} + b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$$

a série de Laurent de g no anel circular

$$A\left(0; 0; \frac{1}{r}\right).$$

Segue então que a série de Laurent de $f = f(z)$ na bola aberta (no plano estendido) $\mathbb{C} \setminus D(0; r)$ e centrada no ponto ∞ é da forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n = \dots + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots.$$

Definimos o resíduo de f em ∞ por qualquer uma das duas expressões

$$\text{Res}(f, \infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz \quad \text{ou} \quad \text{Res}(f, \infty) = -a_{-1}$$

onde $\gamma(\theta) = Re^{-i\theta}$, para $\theta \in [0, 2\pi]$ e $R > r$, está orientada no sentido horário. [Por favor, verifique que as fórmulas coincidem.]

Notemos que na usual orientação anti-horária da circunferência $S_R(0)$, o ponto 0 se encontra à esquerda da curva $\eta(\theta) = Re^{i\theta}$. Analogamente, na definição de $\text{Res}(f; \infty)$, o ponto ∞ se encontra à esquerda da curva orientada no sentido horário $\gamma(\theta) = Re^{-i\theta}$.

Atenção. É falso, em geral, que $\text{Res}(f; \infty) = \text{Res}(g; 0)$. Por exemplo, para

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

temos

$$\text{Res}\left(\frac{1}{z}; \infty\right) = -1 \quad \text{mas} \quad \text{Res}(z; 0) = 0.$$

Comentário. Expliquemos a frequente desigualdade

$$\operatorname{Res}(f; \infty) \neq \operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right); 0\right].$$

Consideremos f holomorfa em \mathbb{C} e γ a parametrização usual de uma circunferência centrada na origem, porém orientada no sentido horário. Definamos

$$\sigma(t) = \frac{1}{\gamma(t)}.$$

Notemos que σ é a parametrização usual de uma circunferência centrada na origem e orientada no sentido anti-horário. É trivial ver que [cheque]

$$\gamma' = -\frac{\sigma'}{\sigma^2}.$$

Donde segue

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} f(z) dz &= \int_0^1 f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^1 f\left(\frac{1}{\sigma(t)}\right) \left(-\frac{\sigma'(t)}{\sigma^2(t)}\right) dt. \end{aligned}$$

A seguir, definamos a função

$$g(w) = -\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right).$$

Concluimos então a identidade

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\sigma} g(w) dw.$$

Donde segue a fórmula abaixo para o resíduo de f no ponto ∞ , a qual é bem útil,

$$\boxed{\operatorname{Res}(f; \infty) = \operatorname{Res}(g; 0), \text{ onde } g(w) = -\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right).}$$

Isto mostra que para definirmos o resíduo de forma invariante por mudança de coordenadas, o resíduo não deve ser associado à função $f(z)$ mas sim ao diferencial

$$f(z) dz.$$

Embora $f(z)$ possa ser analítica em ∞ , o diferencial $f(z) dz$ pode não ser analítico em ∞ , como pode ser visto pela mudança de variável $1/z$ [cheque].

11.4 - Princípio do Argumento para Funções Meromorfas

11.12 Lema. *Seja a um zero, ou um polo, de f . Então,*

$$\begin{cases} a \text{ é polo simples de } \frac{f'}{f} \\ e \\ \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}; a\right) = \nu(f; a). \end{cases}$$

Prova.

- ◇ O caso: a um zero. Escrevamos $f(z) = (z - a)^\nu g(z)$, com $\nu = \nu(f; a)$ a ordem de a como um zero de f , e g holomorfa com $g(a) \neq 0$. Logo, $f' = \nu(z - a)^{\nu-1}g + (z - a)^\nu g'$ e

$$\frac{f'}{f} = \frac{\nu}{z - a} + \frac{g'}{g}.$$

Assim, como g'/g é holomorfa, temos

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}; a\right) = \nu.$$

- ◇ O caso: a um polo. Escrevamos $(z - a)^{-\nu} f = g$, com $\nu = \nu(f; a)$ o oposto (aditivo) da ordem de a como um polo de f e g holomorfa tal que $g(a) \neq 0$. Encontramos $g' = -\nu(z - a)^{-\nu-1}f + (z - a)^{-\nu}f'$ e

$$\frac{g'}{g} = \frac{-\nu}{z - a} + \frac{f'}{f}$$

Assim, como g'/g é holomorfa, temos

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}; a\right) = \nu \clubsuit$$

11.13 Teorema. *Seja Γ um ciclo em Ω e homólogo a 0 em Ω . Seja f meromorfa em Ω e com um número finito de polos e zeros nos pontos*

$$\zeta_1, \dots, \zeta_n,$$

todos em $\Omega \setminus \operatorname{Imagem}(\Gamma)$. Seja $m_j = \operatorname{Ind}(\Gamma; \zeta_j)$, para $j = 1, \dots, n$. Então,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'}{f} dz = \sum_{j=1}^n m_j \nu(f; \zeta_j).$$

Prova. Imediata, pelo teorema dos resíduos 11.10 e o Lema 11.12♣

No resultado a seguir, utilizamos a seguinte notação. Sejam f uma função meromorfa em um aberto Ω e γ uma curva fechada e C^1 por partes em Ω , com

$\text{Ind}_\gamma \equiv 0$ no complementar de Ω e $\text{Ind}_\gamma \equiv 1$ em $I(\gamma)$, o interior de γ .

O número de polos de f no interior de γ e contados com suas multiplicidades é

$$P(f; \gamma) = -\sum \nu(f; p), \text{ onde } p \text{ é um polo de } f \text{ e } p \text{ pertence a } I(\gamma).$$

11.14 Princípio do Argumento (para funções meromorfas). *Mantida a notação imediatamente acima, se f não tem zeros ou polos em $\text{Imagem}(\gamma)$ então*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f} dz = Z(f; \gamma) - P(f; \gamma).$$

Prova. Devido às hipóteses, o conjunto $I(\gamma)$ está contido no aberto Ω .

Como f é meromorfa, o conjunto dos polos de f não tem ponto de acumulação em Ω . Por hipótese, f não tem polos em $\text{Imagem}(\gamma)$. Logo, o conjunto dos polos de f no compacto $I(\gamma) \cup \text{Imagem}(\gamma)$ [vide Definição 7.16] é finito:

$$\{p_1, \dots, p_n\}.$$

Então, f é holomorfa no aberto $O = I(\gamma) \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$. É válida a inclusão $\partial O \subset \text{Imagem}(\gamma) \cup \{p_1, \dots, p_n\}$ [vide Definição 7.16]. Se C é uma componente conexa (aberta) de O então $\partial C \subset \partial O$ [verifique]. Assim, se f é nula em C então f é nula em ∂C e portanto f se anula em $\text{Imagem}(\gamma)$, o que é uma contradição. Em consequência, pelo PZI concluímos que o conjunto dos zeros de f não tem ponto de acumulação no aberto O . Sendo assim, o conjunto dos zeros de f no compacto $I(\gamma) \cup \text{Imagem}(\gamma)$ é finito:

$$\{z_1, \dots, z_m\}.$$

Então, o conjunto das singularidades de $\frac{f'}{f}$ no aberto $I(\gamma)$ é dado por

$$S = \{z_1, \dots, z_m, p_1, \dots, p_n\}.$$

Pelo teorema dos resíduos 11.10, o Lema 11.12 e a definição de $P(f; \gamma)$ segue

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f} dz = \sum_{j=1}^n \text{Res} \left(\frac{f'}{f}; z_j \right) + \sum_{k=1}^m \text{Res} \left(\frac{f'}{f}; p_k \right) = Z(f; \gamma) - P(f; \gamma) \clubsuit$$

11.5 - Cálculo de Integrais

11.15 Definição. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrável em cada $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

- Se existir, o limite

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x) dx$$

é a integral imprópria de f , a qual indicamos por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx,$$

e dizemos que a integral imprópria converge. Se tal limite não existir, dizemos que a integral imprópria diverge.

- Se existir, o limite

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r f(x) dx$$

é denominado valor principal de Cauchy (ou, brevemente, o valor principal) da integral imprópria

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

Indicamos então,

$$VP \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^{+r} f(x) dx.$$

É claro que se existir a integral imprópria de f então existe o valor principal de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

e eles são iguais. É fácil mostrar que o reverso não ocorre (verifique).

Vejamos como computar algumas integrais, via método dos resíduos.

Caso I:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$$

Seja f holomorfa no semi-plano aberto, exceto em um número finito de pontos,

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > -\epsilon\} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}, \text{ com } \epsilon > 0,$$

e a_1, \dots, a_k polos de f tais que $\text{Im}(a_1) > 0, \dots, \text{Im}(a_k) > 0$.

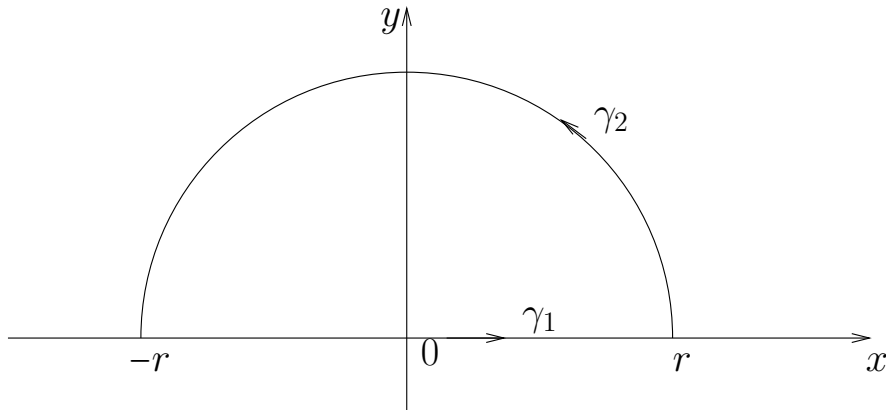


Figura 11.5: Ilustração ao Caso I

Consideremos a semi-circunferência $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ definida por,

$$\gamma_1(t) = t, \text{ se } t \in [-r, r], \text{ e } \gamma_2(t) = re^{it}, \text{ se } t \in [0, \pi],$$

com r tão grande que o interior da semi-circunferência contém os polos de f .

Então, temos

$$2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, a_j) = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{-r}^r f(t) dt + \int_0^{\pi} f(re^{it}) ire^{it} dt.$$

Desta forma obtemos a implicação:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} f(re^{it}) ire^{it} dt = 0 \implies 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, a_j) = VP \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

Uma condição simples para que o limite à esquerda seja zero é dada por

$$(11.15.1) \quad \begin{cases} \text{existe } K > 0 \text{ tal que } |f(re^{it})| \leq \frac{K}{r^2}, \\ \text{para todo } t \in [0, \pi] \text{ e para todo } r \text{ grande o suficiente.} \end{cases}$$

Pois, neste caso, para r suficientemente grande temos

$$\left| \int_0^\pi f(re^{it})ire^{it} dt \right| \leq \int_0^\pi \frac{Kr}{r^2} dt = \frac{K\pi}{r} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainda, a condição (11.15.1) acima implica

$$|f(x)| \leq \frac{K}{x^2}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \text{ com } x \text{ grande o suficiente,}$$

donde segue que existe a integral imprópria de f dada por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad (\text{cheque}).$$

Logo, encontramos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= VP \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \\ &= 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{res}(f, a_j). \end{aligned}$$

A condição (11.15.1) ocorre quando (solicito ao leitor verificar), por exemplo, a função $f = f(x)$ tem a forma

$$\begin{cases} f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \\ \text{onde} \\ P \text{ e } Q \text{ são polinômios com coeficientes reais,} \\ \text{satisfazendo} \\ \text{grau}(Q) \geq \text{grau}(P) + 2 \text{ e } Q \text{ não tem raízes reais.} \end{cases}$$

Exemplo para o caso I. Compute

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}.$$

[Este exemplo é histórico. Ainda, Leibnitz (incompreensivelmente para os olhos modernos) considerou que não era possível fatorar o polinômio $Q(z) = z^4 + 1$.]

Solução.

As raízes de $Q(z) = z^4 + 1$ no semi-plano superior são

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \omega \quad \text{e} \quad e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\bar{\omega}.$$

Pelo que foi desenvolvido no caso I, encontramos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} = 2\pi i \left[\text{Res} \left(\frac{1}{z^4 + 1}; e^{i\frac{\pi}{4}} \right) + \text{Res} \left(\frac{1}{z^4 + 1}; e^{i\frac{3\pi}{4}} \right) \right].$$

Pela propriedade (R5) [vide Lema 11.11] temos [observemos que $\omega^4 = -1$]

$$\begin{cases} \text{Res} \left(\frac{1}{z^4 + 1}; e^{i\frac{\pi}{4}} \right) = \frac{1}{Q'(\omega)} = \frac{1}{4\omega^3} = -\frac{\omega}{4} \\ \text{e} \\ \text{Res} \left(\frac{1}{z^4 + 1}; e^{i\frac{3\pi}{4}} \right) = \frac{1}{4(-\bar{\omega})^3} = \frac{\bar{\omega}}{4}. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} &= \frac{\pi i}{2} (-\omega + \bar{\omega}) \\ &= \frac{\pi i}{2} (-\sqrt{2}i) \\ &= \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \clubsuit \end{aligned}$$

Exercício. [Importante para o método de frações parciais.] Compute

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

Caso II:
$$\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) dt.$$

Dada uma função racional $F(z)$, onde $z = x + iy$, consideremos a curva

$$\gamma(t) = e^{it}, \text{ onde } t \in [0, 2\pi] \text{ (sentido anti-horário).}$$

Notemos que se $z = e^{it}$ então temos

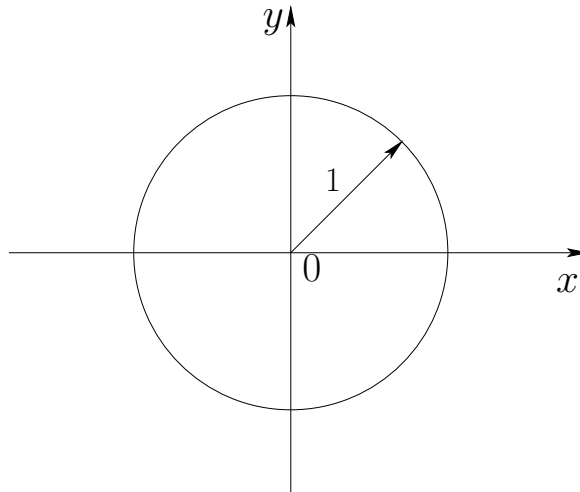


Figura 11.6: Ilustração ao Caso II

$$|z| = 1, \quad \bar{z} = \frac{1}{z}, \quad \frac{dz}{dt} = iz \text{ e}$$

$$\cos t = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin t = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \text{ e } dt = \frac{dz}{iz}.$$

Logo,

$$\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) dt = \int_{\gamma} F \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right) \frac{dz}{iz}.$$

Se o integrando à direita não possui polos ao longo de γ , obtemos

$$\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) dt = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, a_j),$$

com a_1, \dots, a_n as singularidades de

$$f(z) = \frac{1}{iz} F \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right) \text{ em } B(0; 1).$$

Exemplo 1 para o caso II. Compute

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta}, \quad \text{com } a \text{ real e } a \in (1, +\infty).$$

Solução.

Pelo desenvolvido no caso II temos

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} = \oint_{|z|=1} \left[\frac{1}{a + \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)} \right] \frac{dz}{iz}.$$

A função

$$f(z) = \frac{1}{iz} \left[\frac{1}{a + \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)} \right] = \frac{2z}{iz(2az + z^2 + 1)} = \frac{-2i}{2az + z^2 + 1}$$

não se anula ao longo da curva $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, onde $\theta \in [0, 2\pi]$. Ainda, temos

$$z^2 + 2az + 1 = (z + a)^2 - (a^2 - 1) = (z + a + \sqrt{a^2 - 1})(z + a - \sqrt{a^2 - 1}).$$

Observemos que $a + \sqrt{a^2 - 1} > 1$ e $0 < a - \sqrt{a^2 - 1} < 1$. Logo, o único polo de f na bola $B(0; 1)$ é

$$-a + \sqrt{a^2 - 1} \in B(0; 1).$$

Pela propriedade (R5) [vide Lema 11.11] segue

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz &= \text{Res} \left(f; -a + \sqrt{a^2 - 1} \right) \\ &= \frac{-2i}{2(-a + \sqrt{a^2 - 1}) + 2a} \\ &= \frac{-i}{\sqrt{a^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Por fim, temos

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}} \clubsuit$$

Exercício. Compute (segue trivialmente do exemplo acima, cheque)

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta}, \quad \text{onde } a \in (1, +\infty).$$

Exemplo 2 para o caso II. Compute

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta}.$$

Solução.

Notemos que

$$I = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta} = \frac{1}{4} \int_{|z|=1} \frac{1}{1 + \left[\frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z}\right)\right]^2} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{4} \int_{|z|=1} f(z) dz,$$

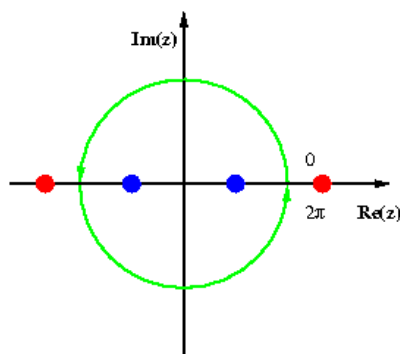


Figura 11.7: Caso II - Exemplo 2. Os quatro polos de f .

onde

$$f(z) = \frac{4iz}{(z^2 - 1)^2 - 4z^2} = \frac{4iz}{z^4 - 6z^2 + 1} = \frac{4iz}{[(z - 1)^2 - 2][(z + 1)^2 - 2]}.$$

Os polos de f são [em ordem crescente, vide figura acima]

$$-1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2} \text{ e } 1 + \sqrt{2}.$$

Apenas $\zeta = 1 - \sqrt{2}$ e $-\zeta = -1 + \sqrt{2}$ pertencem a $B(0; 1)$. Pelo teorema dos resíduos,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} f(z) dz = \text{Res}(f; \zeta) + \text{Res}(f; -\zeta).$$

Pela propriedade (R5) [vide Lema 11.11] segue

$$\text{Res}(f; \zeta) = \frac{4i\zeta}{4\zeta^3 - 12\zeta} = \frac{i}{\zeta^2 - 3} = \frac{i}{-2\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \text{Res}(f; -\zeta) = \frac{i}{-2\sqrt{2}}.$$

Por fim,

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = \pi\sqrt{2} \quad \text{e} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \clubsuit$$

Caso III: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(\lambda x) dx$ ou $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(\lambda x) dx$ [λ real].

Analogamente a uma situação descrita no caso I, suponhamos:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ com } P \text{ e } Q \text{ polinômios com coeficientes reais,} \\ Q \text{ sem raízes reais e } \text{grau}(Q) \geq \text{grau}(P) + 2. \end{cases}$$

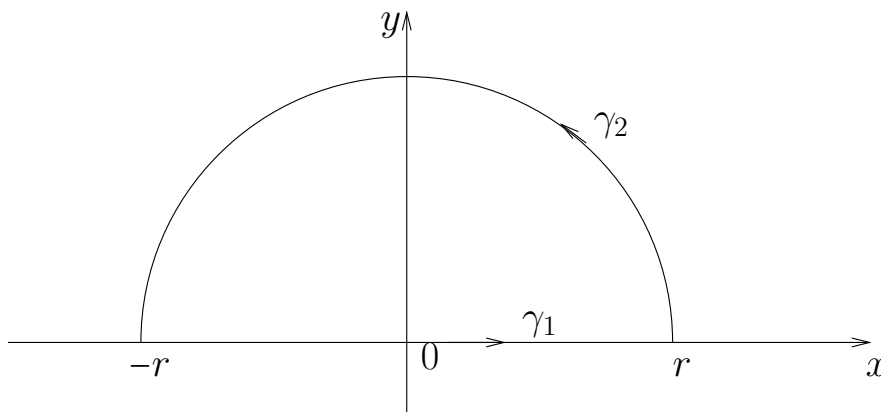


Figura 11.8: Ilustração ao Caso III

Se o integrando contiver a função cosseno, o uso imediato do contorno semi-circular visto no caso I não é factível aqui. Pois, sobre o eixo imaginário temos

$$\cos(iy) = \frac{e^{-y} + e^y}{2} = \cosh(y), \text{ com } y \in \mathbb{R},$$

e assim, a função $\cos z$ cresce exponencialmente sobre o eixo-imaginário.

A idéia é então

trocar $\cos z$ por e^{iz} ,

e em seguida computar a integral usando o contorno semi-circular visto no caso I, notando que no semi-plano superior vale a desigualdade

$$|e^{iz}| = e^{-y} \leq 1, \text{ pois } \text{Im}(z) = y \geq 0,$$

e, por fim, computar a parte real do valor obtido.

11.16 Exemplo para o caso III. *Compute*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{1+x^2} dx = \pi e^{-\lambda}, \text{ onde } \lambda > 0.$$

Solução.

A integral imprópria dada converge (cheque). Seja $z = x + iy$. Definamos

$$f(z) = \frac{e^{i\lambda z}}{1+z^2}.$$

Consideremos a semi-circunferência $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ como na exposição do caso III, indiquemos seu raio por a com $a > 1$. A única singularidade de f no semi-plano superior $\{z : \text{Im}(z) > 0\}$ é o polo simples

$$\zeta = i.$$

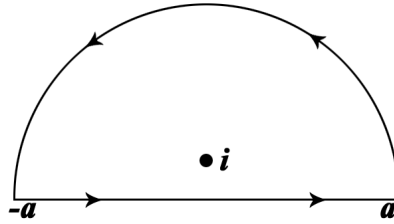


Figura 11.9: Exemplo 11.16

Pelo teorema dos resíduos segue

$$2\pi i \text{Res}(f; i) = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

Notemos que se $|z| = |x + iy| = a$ e $y > 0$, então $|z^2 + 1| \geq a^2 - 1$ e

$$|f(z)| \leq \frac{|e^{i\lambda(x+iy)}|}{a^2 - 1} \leq \frac{e^{-\lambda y}}{a^2 - 1} \leq \frac{1}{a^2 - 1}.$$

Logo,

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi a}{a^2 - 1} \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0.$$

Portanto, obtemos

$$2\pi i \text{Res}(f; i) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \frac{e^{i\lambda x}}{1+x^2} dx = VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{1+x^2} dx.$$

Donde segue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{1+x^2} dx = 2\pi i \frac{e^{\lambda i^2}}{2i} = \pi e^{-\lambda}.$$

Para encerrar, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + 1} dx = \text{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{x^2 + 1} dx \right) = \pi e^{-\lambda} \clubsuit$$

Caso IV:
$$\text{VP} \int_a^b f(x)dx.$$

11.17 Definição. Dizemos que a integral $\int_a^b f(x)dx$ é absolutamente convergente se a integral (própria ou imprópria)

$$\int_a^b |f(x)|dx,$$

é convergente (i.e., finita). A integral é dita absolutamente divergente se

$$\int_a^b |f(x)|dx = +\infty.$$

Lembrando o que ocorre com séries absolutamente convergentes e séries condicionalmente convergentes, para uma integral absolutamente convergente temos essencialmente uma única maneira de atribuir um valor para a integral, enquanto que para uma integral absolutamente divergente não temos uma forma óbvia para atribuir um valor a tal integral.

11.18 Definição. Seja $f = f(x)$ contínua em $[a, x_0) \cup (x_0, b]$. O valor principal da integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

é, se existir o limite abaixo, definido e denotado por

$$\text{VP} \int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{x_0-\epsilon} f(x)dx + \int_{x_0+\epsilon}^b f(x)dx \right).$$

Exercício. O valor principal de uma integral coincide com o valor usual de uma integral (própria ou imprópria) se o integrando f é absolutamente integrável.

A definição de valor principal, se ou a , ou b , ou ambos: são pontos de descontinuidade de f ou são infinitos ou não pertencem ao domínio de f , é análoga à definição já dada 11.18 (imediatamente acima).

Se f tem um número finito de descontinuidades no intervalo aberto (a, b) , o valor principal da integral de f é computado dividindo (a, b) em sub-intervalos, cada um contendo um ponto de descontinuidade de f e então computando os valores principais de cada integral de f restrita a cada sub-intervalo e, finalmente, somando os valores principais obtidos.

11.19 Exemplo para o caso IV.

$$VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3 - 1} dx = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

O integrando, próximo de $x = 1$, é comparável com a função

$$\frac{1}{x - 1}.$$

Assim, a integral (imprópria) acima é absolutamente divergente. As integrais, nos intervalos $(-\infty, 1 - \epsilon]$ e $[1 + \epsilon, +\infty)$ são absolutamente convergentes (verifique).

O valor principal da integral acima é definido por:

$$VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3 - 1} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{1-\epsilon} \frac{1}{x^3 - 1} dx + \int_{1+\epsilon}^{+\infty} \frac{1}{x^3 - 1} dx \right).$$

A função

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - 1}$$

têm três polos de ordem 1, que são as 3 raízes cúbicas de $z = 1$. Integremos f sobre uma semi-circunferência denteada superior C com base centrada na origem, de raio $R > 1$, contornando o polo simples $z = 1$ e orientada no sentido anti-horário.

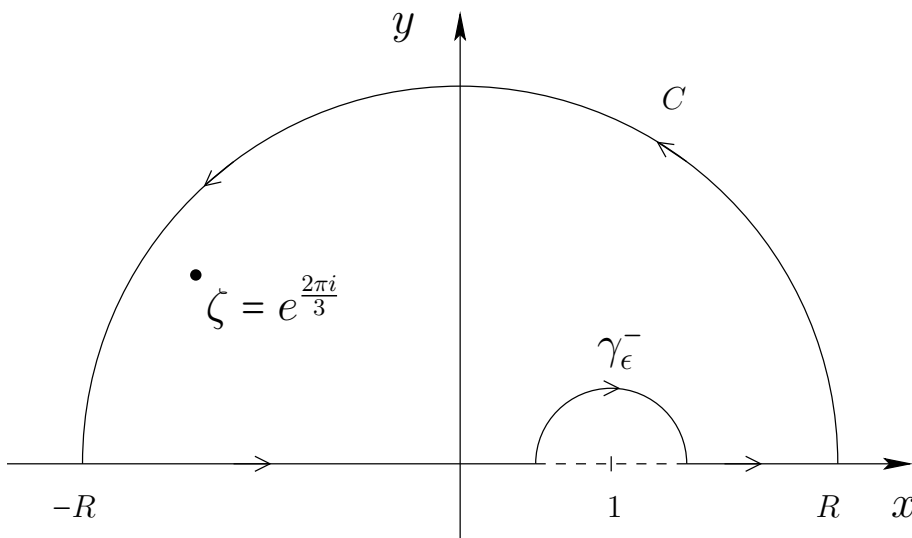


Figura 11.10: Ilustração ao Caso IV

O interior de tal semi-circunferência denteada contém o polo simples $\zeta = e^{2\pi i/3}$ e pelas regras operatórias 11.11, (R5) e (R6), obtemos

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3-1}, \zeta\right) = \frac{1}{3\zeta^2} = \frac{\zeta}{3}, \quad \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3-1}, 1\right) = \frac{1}{3}$$

e

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon^-} \frac{1}{z^3-1} dz = -\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3-1}, 1\right) = -\frac{\pi}{3}i,$$

onde empregamos a parametrização γ_ϵ^- com

$$\gamma_\epsilon(t) = 1 + \epsilon e^{i\theta}, \quad \text{com } \theta \in [0, \pi].$$

Assim temos, com Γ_R uma parametrização para a semi-circunferência superior centrada na origem e de raio R , orientada no sentido anti-horário,

$$(11.19.1) \quad 2\pi i \frac{e^{2\pi i/3}}{3} = \int_C f(z) dz \\ = \int_{-R}^{1-\epsilon} \frac{dx}{x^3-1} + \int_{\gamma_\epsilon^-} \frac{dz}{z^3-1} + \int_{1+\epsilon}^R \frac{dx}{x^3-1} + \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^3-1}.$$

Aplicando a Estimativa M-L temos:

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^3-1} \right| \leq \frac{\pi R}{R^3-1} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

Desta forma, computando o limite de (11.19.1) para $R \rightarrow +\infty$ obtemos

$$\frac{2\pi i}{3} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(\int_{-\infty}^{1-\epsilon} \frac{dx}{x^3-1} + \int_{1+\epsilon}^{+\infty} \frac{dx}{x^3-1} \right) + \int_{\gamma_\epsilon^-} \frac{dz}{z^3-1},$$

donde, computando o limite para $\epsilon \rightarrow 0$ segue,

$$-\frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{3}i = VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^3-1} - \frac{\pi}{3}i \clubsuit$$

$$\text{Caso V: } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(x) dx \text{ ou } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(x) dx.$$

Suponhamos

$$\begin{cases} f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ com } P \text{ e } Q \text{ polinômios com coeficientes reais} \\ \text{grau}(Q) = \text{grau}(P) + 1. \end{cases}$$

Notemos que neste caso as integrais (impróprias) são absolutamente divergentes.

11.20 Lema de Jordan. Dado o semi-círculo $\Gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$, segue

$$\int_{\Gamma_R} |e^{iz}| |dz| < \pi.$$

Prova.

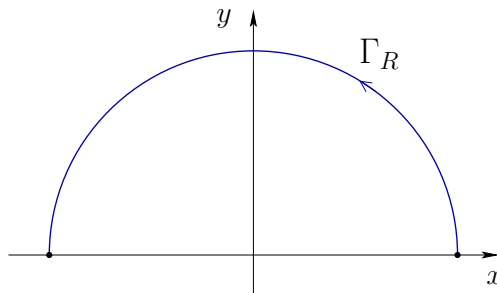


Figura 11.11: Lema de Jordan

É claro que

$$\int_{\Gamma_R} |e^{iz}| |dz| = \int_0^\pi |e^{iRe^{i\theta}}| |iRe^{i\theta}| d\theta = R \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta.$$

No intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, a função $\sin \theta$ tem a concavidade voltada para baixo e seu gráfico está acima da reta conectando os pontos $(0, 0)$ e $(\frac{\pi}{2}, 1)$.

Logo,

$$\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta, \text{ se } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Assim,

$$\int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R\theta}{\pi}} d\theta = \frac{\pi}{R} \int_0^R e^{-t} dt < \frac{\pi}{R} \clubsuit$$

11.21 Exemplo para o caso V. *Verifiquemos*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Abaixo temos o gráfico da função $(\sin x)/x$, definida na variável real x .

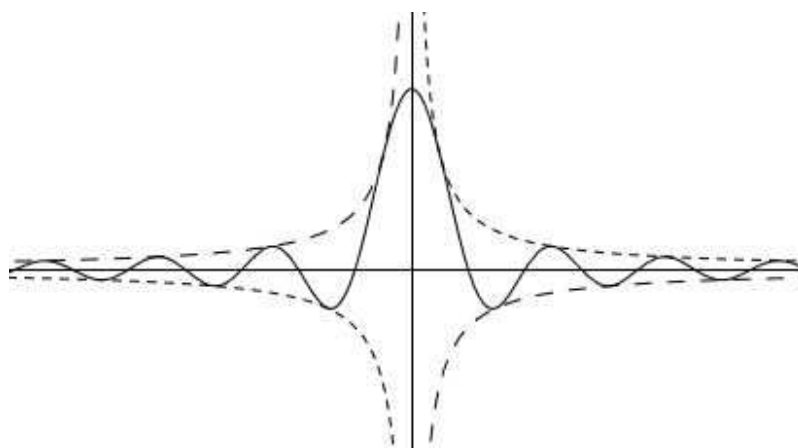


Figura 11.12: O gráfico de $\frac{\sin x}{x}$

Mudemos para variável complexa. Como

$$\frac{\sin z}{z}$$

é inteira, temos que $(\sin x)/x$ é integrável em qualquer intervalo limitado.

Cheque que $(\sin x)/x$ não é absolutamente integrável em $[0, +\infty]$. Isto é,

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty.$$

Ainda, devido à paridade da função em questão temos

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-R}^{+R} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Logo, encontraremos o resultado desejado computando o valor principal

$$VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Consideremos

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z},$$

com um só polo (simples) em $z = 0$ e

$$\text{Res}(f, 0) = 1.$$

Seja C a semi-circunferência denteada no semi-plano superior, contornando $z = 0$.

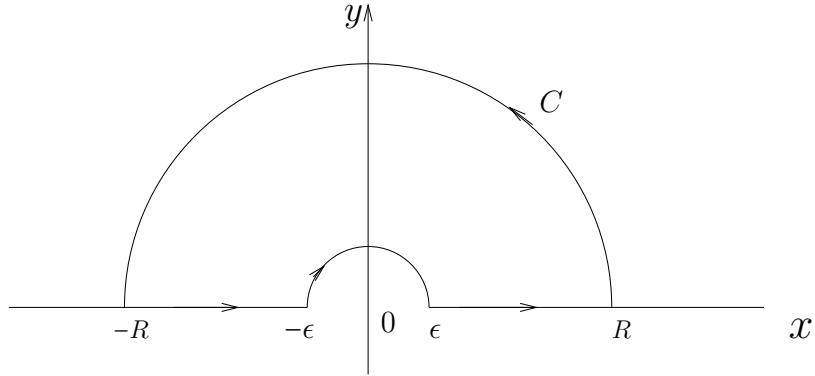


Figura 11.13: Ilustração ao Exemplo 11.21

Com a notação no Lema de Jordan, seja Γ_R a semi-circunferência de raio R no semi-plano superior.

Seja $\epsilon > 0$ e pequeno o suficiente. Definindo

$$\gamma_\epsilon(\theta) = \epsilon e^{i\theta}, \text{ com } \theta \in [0, \pi],$$

encontramos

$$(11.21.1) \quad 0 = \int_C f(z) dz = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\gamma_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz.$$

Pelas regras operatórias para resíduos temos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = -\pi \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0\right) = -\pi i.$$

Computando o limite de (11.21.1) para $\epsilon \rightarrow 0^+$ encontramos

$$0 = VP \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x} dx - \pi i + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz.$$

Destacando a parte imaginária da identidade acima obtemos

$$0 = \int_{-R}^R \frac{\sin x}{x} dx - \pi + \operatorname{Im} \left[\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right].$$

Finalmente, pelo Lema de Jordan 11.20 segue

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \frac{1}{R} \int_{\Gamma_R} |e^{iz}| |dz| < \frac{\pi}{R} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

Logo,

$$VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{\sin x}{x} dx = \pi \clubsuit$$

Caso VI: Ramos - Um contorno buraco de fechadura

Exemplo 11.22. Verifiquemos que

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 6x + 8} dx = \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Solução.

Notemos que [cheque]

$$(11.22.1) \quad 0 \leq \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 6x + 8} \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}, \text{ para todo } x > 0.$$

Logo, a integral solicitada é absolutamente convergente.

Passando para variável complexa, para facilitar os cálculos usamos o ramo

$$\sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{\mathcal{L}(z)}{2}}, \text{ onde } \mathcal{L} : \mathbb{C} \setminus [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$$

é um ramo logaritmo com argumento variando em $[0, 2\pi)$.

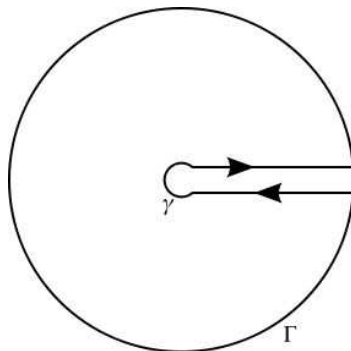


Figura 11.14: Exemplo 11.22

Consideremos ϵ tal que $0 < \epsilon < 1$ e $R > 4$.

Seja Γ o arco de circunferência de raio R centrada na origem, orientada no sentido anti-horário,

$$\text{de início } A = \sqrt{R^2 - \epsilon^2} + i\epsilon \text{ e final } B = \sqrt{R^2 - \epsilon^2} - i\epsilon.$$

Seja γ o arco de circunferência de raio $\sqrt{2}\epsilon$ centrada na origem, orientada no sentido horário,

$$\text{de início } b = \epsilon - i\epsilon \text{ e final } a = \epsilon + i\epsilon.$$

Seja C o contorno indicado na figura acima.

Notemos que os zero de $z^2 + 6z + 8 = (z + 3)^2 - 1$ no interior de C são

$$\boxed{\zeta_1 = -4 \text{ e } \zeta_2 = -2.}$$

Seja

$$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^2 + 6z + 8}, \text{ onde } z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty).$$

Então, temos

$$(11.22.2) \quad \int_C f(z)dz = \int_\epsilon^R f(x+i\epsilon)dx + \int_\Gamma f(z)dz + \int_R^\epsilon f(x-i\epsilon)dx + \int_\gamma f(z)dz.$$

No que segue, $z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$.

Temos $(\sqrt{z})^2 = z$ e então $|\sqrt{z}| = \sqrt{|z|}$. Pela desigualdade (11.22.1) segue

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|z|^{\frac{3}{2}}} \text{ se } z \neq 0.$$

Donde, pela estimativa M-L obtemos

$$\left| \int_\Gamma f(z)dz \right| \leq \frac{1}{R^{3/2}} 2\pi R \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

Se $z \in \text{Imagem}(\gamma)$, então $|\sqrt{z}| = \sqrt{|z|} \leq 1$ e $|z^2 + 6z + 8| \geq 8 - 6 - 1 = 1$. Donde segue

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq 1 \cdot \sqrt{2}\epsilon\pi \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0.$$

Devido à escolha do argumento, temos

$$\begin{cases} \sqrt{x+i\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{x} & \text{uniformemente em } [0, R] \text{ e} \\ \sqrt{x-i\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} e^{i\pi} \sqrt{x} & \text{uniformemente em } [0, R]. \end{cases}$$

A seguir, em (11.22.2) impondo $\epsilon \rightarrow 0$ e aplicando o teorema dos resíduos obtemos

$$2\pi i [\text{Res}(f; -4) + \text{Res}(f; -2)] = \int_0^R \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 6x + 8} + \int_\Gamma f(z)dz - \int_R^0 \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 6x + 8} dx.$$

Impondo $R \rightarrow +\infty$ nesta última identidade segue

$$2\pi i [\text{Res}(f; -4) + \text{Res}(f; -2)] = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 6x + 8} dx.$$

Por fim, (notemos que $\sqrt{-4} = 2i$ e $\sqrt{-2} = \sqrt{2}i$) propriedades de resíduos mostram

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 6x + 8} dx = \pi i \left(\frac{2i}{2(-4) + 6} + \frac{\sqrt{2}i}{2(-2) + 6} \right) = \pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \clubsuit$$

11.6 - Transformada de Fourier

Dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ absolutamente integrável, a sua transformada de Fourier é

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx, \text{ onde } \xi \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 11.23. Seja $f(x) = e^{-\pi x^2}$. Mostremos que

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx = e^{-\pi \xi^2}.$$

◊ **Primeira Solução (Via Resíduos).**

Fixemos $\xi > 0$. Consideremos $R > 0$ e o retângulo de vértices $-R$ e R , no eixo real, e vértices superiores $R + i\xi$ e $-R + i\xi$, orientado no sentido anti-horário.



Figura 11.15: Retângulo de vértices $-R$, R , $R + i\xi$ e $-R + i\xi$.

Seja Γ_R a parametrização do retângulo acima. Seja

$$f(z) = e^{-\pi z^2} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}).$$

Pelo teorema de Cauchy temos

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0.$$

Logo,

$$(11.23.1) \quad 0 = \int_{-R}^R e^{-\pi x^2} dx + \int_0^\xi e^{-\pi(R+iy)^2} i dy + \int_R^{-R} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx + \int_\xi^0 e^{-\pi(-R+iy)^2} dy.$$

As integrais nas “laterais” tendem a 0 se $R \rightarrow +\infty$. De fato, temos

$$|e^{-\pi(R+iy)^2}| = |e^{-\pi(-R+iy)^2}| \leq e^{\pi\xi^2} e^{-\pi R^2}, \quad \text{se } y \in [0, \xi].$$

Donde segue

$$\left| \int_0^\xi e^{-\pi(\pm R+iy)^2} i dy \right| \leq \xi e^{\pi\xi^2} e^{-\pi R^2} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

Então, impondo $R \rightarrow +\infty$ em (11.23.1) encontramos

$$(11.23.2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx + e^{\pi\xi^2} \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx = 0.$$

Por outro lado, pelo teorema de Fubini e por coordenadas polares temos

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx \right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi y^2} dy \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\pi\rho^2} \rho d\rho d\theta \\ &= 2\pi \frac{e^{-\pi\rho^2}}{(-2\pi)} \Big|_0^{+\infty} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Desta forma, reescrevemos (11.23.2) como

$$1 - e^{\pi\xi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx = 0.$$

Isto é,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx = e^{-\pi\xi^2}, \quad \text{se } \xi > 0.$$

O caso $\xi \geq 0$ está provado.

Para finalizar, mostremos que a função \hat{f} é par. Notemos que dada qualquer função g absolutamente integrável em \mathbb{R} , a mudança de variável $x = -t$ fornece

$$\int_{-R}^R g(x) dx = \int_R^{-R} g(-t) \cdot (-1) dt = \int_{-R}^R g(-t) dt, \quad \text{para todo } R > 0.$$

Donde então segue

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{2\pi i t \xi} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{-2\pi i t (-\xi)} dx = \hat{f}(-\xi). \end{aligned}$$

A primeira solução está completa.

♦ Segunda Solução (Via Derivação Sob o Sinal de Integração).

Notemos que

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, \xi) dx,$$

onde

$$F(x, \xi) = e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} \quad \text{com } (x, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Temos

$$\left\{ \begin{array}{l} |F(x, \xi)| = e^{-\pi x^2} \quad \text{com } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx < \infty \\ \text{e} \\ \left| \frac{\partial F}{\partial \xi}(x, \xi) \right| = 2\pi |x| e^{-\pi x^2} \quad \text{com } \int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-\pi x^2} dx < \infty. \end{array} \right.$$

Segue então [vide comentários e exercícios no Capítulo 10 p. 41 e adapte (é simples) ou vide Teorema 10.4 e/ou Teorema 10.22 e adapte (é simples)] que

$$\frac{d(\hat{f})}{d\xi}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} (-2\pi i x) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Destacando (momentâneamente) i e então integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi x) e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx &= e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \xi} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} (-2\pi i \xi) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= 2\pi i \xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx. \end{aligned}$$

Donde segue

$$\frac{1}{i} \frac{d\hat{f}}{d\xi}(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$$

e portanto

$$\frac{d\hat{f}}{d\xi}(\xi) = -2\pi \xi \hat{f}(\xi).$$

Assim, \hat{f} satisfaz a edo

$$g'(\xi) = -2\pi \xi g(\xi).$$

Donde segue que \hat{f} tem a forma

$$\hat{f}(\xi) = \lambda e^{-2\pi \xi^2}, \quad \text{para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Como $\hat{f}(0) = 1$, segue que $\lambda = 1$. Concluimos então que

$$\hat{f}(\xi) = e^{-\pi \xi^2} \spadesuit$$