MAT 225 - FUNÇÕES ANALÍTICAS

Instituto de Matemática e Estatística da USP

Ano 2015

Professor Oswaldo R. B. de Oliveira

`http://www.ime.usp.br/~oliveira` oliveira@ime.usp.br

Capítulo 10 - Integração Complexa

Capítulo 1

NÚMEROS COMPLEXOS

Capítulo 2

TOPOLOGIA DO PLANO $\mathbb{C}$

Capítulo 3

POLINÔMIOS

Capítulo 4

SÉRIES E SOMABILIDADE

Capítulo 5

SÉRIES DE POTÊNCIAS

Capítulo 6

FUNÇÕES ANALÍTICAS

Capítulo 7

EXPONENCIAL, ÍNDICE, PRINCÍPIO DO ARGUMENTO E TEOREMA DE ROUCHÉ

Capítulo 8

TEOREMA DE CAUCHY HOMOTÓPICO E LOGARITMO

Capítulo 9

TEOREMA DA APLICAÇÃO E ESFERA DE RIEMANN E APLICAÇÕES CONFORMES

Capítulo 10

INTEGRAÇÃO COMPLEXA

10.1 - Integral sobre curvas

Sejam $J = [a, b]$ em $\mathbb{R}$ e uma função $f : J \to \mathbb{C}$, com

$$f = u + iv, \text{ onde } u = \mathrm{Re}(f) \text{ e } v = \mathrm{Im}(f).$$

A integral definida de f é, se u e v são integráveis,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt, \text{ também denotada } \int_a^b f dt.$$

Uma primitiva de f é toda função $F : J \to \mathbb{C}$ tal que

$$F'(t) = f(t), \text{ para todo } t \in J.$$

Sejam $f : J \to \mathbb{C}$ e $g : J \to \mathbb{C}$ e λ uma constante em $\mathbb{C}$. Se f e g são integráveis, então é fácil ver que $f + g$ é integrável e

$$\int_a^b (f + \lambda g)dt = \int_a^b f\,dt + \lambda\int_a^b g\,dt.$$

Como sempre, Ω denota um aberto em $\mathbb{C}$ em todo o capítulo. Definimos

$$C(\Omega; \mathbb{C}) = \{f : \Omega \to \mathbb{C}, \text{ tal que } f \text{ é contínua}\}.$$

Dadas $f \in C(\Omega;\mathbb{C})$ e $\gamma : [a,b] \to \Omega$ de classe C^1, a integral de f ao longo de γ é

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

Sejam $f \in C(\Omega;\mathbb{C})$ e γ uma curva C^1 por partes em Ω, dada pela justaposição $\gamma = \gamma_1 \vee \cdots \vee \gamma_n$ com cada curva γ_j de classe C^1. A integral de f ao longo de γ é

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)dz.$$

Considerando a curva reversa γ^-, vale a identidade

$$\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz.$$

10.1 Lema. *Seja $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ contínua. Então,*

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\,dt\right| \le \int_a^b |\varphi(t)|\,dt.$$

Prova.

Existe um número real θ tal que

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt = e^{i\theta}\left|\int_a^b \varphi(t)\,dt\right|$$

e portanto

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\,dt\right| = \int_a^b e^{-i\theta}\varphi(t)\,dt \quad \text{é um número real.}$$

Logo,

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\,dt\right| = \int_a^b \mathrm{Re}\,[e^{-i\theta}\varphi(t)]\,dt \le \int_a^b \left|\mathrm{Re}\,[e^{-i\theta}\varphi(t)]\right|\,dt \le \int_a^b |\varphi(t)|\,dt \clubsuit$$

Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe C^1. O comprimento ("lenght") de γ é

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt.$$

Se $\gamma = \gamma_1 \vee \cdots \vee \gamma_n$ é uma justaposição de curvas de classe C^1, definimos

$$L(\gamma) = L(\gamma_1) + \cdots + \text{Ł}(\gamma_n).$$

10.2 Teorema (Estimativa M-L). *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ contínua sobre $\gamma : J \to \Omega$, onde γ é C^1 por partes, e $M \geq 0$ satisfazendo*

$$|f(\gamma(t))| \leq M, \text{ para todo } t \text{ em } J.$$

Então,

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq ML(\gamma).$$

Prova.

Suponhamos γ de classe C^1 [deixo caso geral ao leitor]. Mantida a notação $J = [a, b]$, o Lema 10.1 garante

$$\left| \int_\gamma f dz \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)| dt \leq M \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = ML(\gamma) \clubsuit$$

10.3 Proposição. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ com derivada contínua.*

(A) Dada uma curva $\gamma : [a, b] \to \Omega$ de classe C^1, temos

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_a^b \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t)\, dt.$$

(B) Dado um segmento linear de extremidades z e w e contido em Ω, temos

$$f(z) - f(w) = (z - w) \int_0^1 f'\big(w + t(z - w)\big)dt \quad [\textit{TVM (forma integral)}].$$

Prova.

Pela regra da cadeia [vide 9.1], a derivada de $f \circ \gamma$ existe e é contínua.

(A) Pondo $f = u + iv$, segue $f \circ \gamma = (u \circ \gamma) + i(v \circ \gamma) : [a, b] \to \mathbb{C}$ e então

$$\int_a^b (f \circ \gamma)' dt = \int_a^b (u \circ \gamma)' dt + i \int_a^b (v \circ \gamma)' dt = (u \circ \gamma)\big|_a^b + i(v \circ \gamma)\big|_a^b = (f \circ \gamma)\big|_a^b.$$

(B) Seja $\sigma(t) = w + t(z - w)$, com $0 \leq t \leq 1$. Por (A) e a regra da cadeia (9.1),

$$f(z) - f(w) = \int_0^1 (f \circ \sigma)'(t) dt = (z - w) \int_0^1 f'\big(w + t(z - w)\big)dt \clubsuit$$

10.2 - Continuidade e Derivação sob o Sinal de Integração (integrais próprias e parâmetro complexo)

10.4 Teorema. *Seja Ω aberto em $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{C}$ contínua. Então,*

(A) A função $\varphi(z) = \int_0^1 f(z,t)dt$ é contínua em Ω.

(B) Se a função $\frac{\partial f}{\partial z}(z,t)$ é contínua [em $\Omega \times [0,1]$] então φ é derivável e

(Regra de Leibniz para integrais) $\quad \varphi'(z) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt.$

Prova. Fixemos $z \in \Omega$, um $r > 0$ tal que $K = D(z;r) \times [0,1] \subset \Omega \times [0,1]$ e $\epsilon > 0$.

(A) Pel continuidade uniforme de f em K (e o Lema 10.1) existe $\delta > 0$ tal que

$$|\varphi(z) + \varphi(z+h)| \leq \int_0^1 |f(z,t) - f(z+h,t)|dt \leq \epsilon, \text{ se } |h| < \delta.$$

(B) Para h em $\mathbb{C}$, com $0 < |h| < r$, temos

$$\frac{\varphi(z+h) - \varphi(z)}{h} - \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt = \int_0^1 \left[\frac{f(z+h,t) - f(z,t)}{h} - \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\right]dt$$

[aqui usamos o TVM forma integral Prop. 10.3(B)]

$$= \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z+sh,t)ds - \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)ds\right]dt$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial z}(z+sh,t) - \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\right]dsdt.$$

Pela continuidade uniforme de $\partial f/\partial z$ em K, existe $\eta > 0$ tal que o módulo do último integrando acima é menor que ϵ para quaisquer $0 \leq t,s \leq 1$ e $|h| < \eta$. Segue então, pelo Lema 10.1,

$$\left|\frac{\varphi(z+h) - \varphi(z)}{h} - \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt\right| \leq \epsilon, \text{ se } 0 < |h| < \eta.$$

Portanto φ é holomorfa e vale a fórmula anunciada♣

É instrutivo provar o teorema acima via a Regra de Leibniz para integrais e com parâmetro real [por favor, enuncie-a e prove-a] e das equações de Cauchy-Riemann. Lembre que uma função $f = u+iv$ é derivável-complexa se e só o campo associado $F(u,v)$ é real-diferenciável e satisfaz as equações de Cauchy-Riemann. Vide `http://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-DERIVAR-SOB-INTEGRAL.pdf`.

10.3 - O Teorema de Cauchy-Goursat e Primitiva Global, o Teorema de Cauchy e o Teorema de Cauchy Homotópico

10.5 Proposição. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ contínua, F uma primitiva de f e γ uma curva C^1 por partes em Ω conectando o ponto inicial z_0 ao ponto final z_1. Então,*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(z_1) - F(z_0).$$

Em particular, se γ é fechada então

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Prova.

Seja $\gamma : [a, b] \to \Omega$ de classe C^1 (verifique o caso em que γ é C^1 por partes).

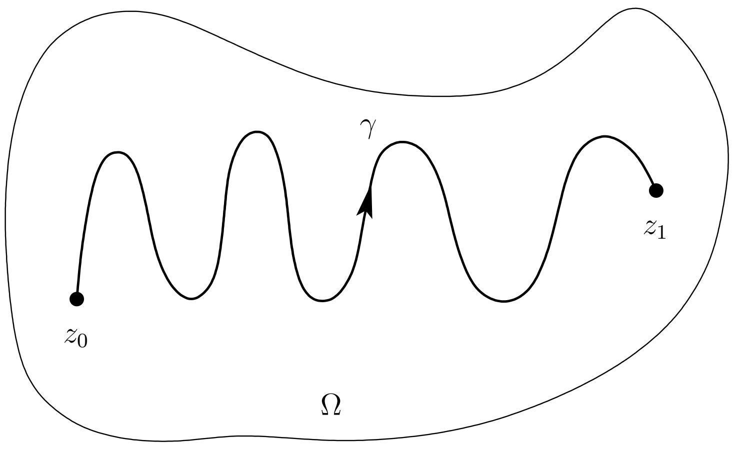

Figura 10.1: Independência do caminho

Pela hipótese, a regra da cadeia (9.1), e a Proposição 10.3(A) segue

$$\int_\gamma f dz = \int_\gamma F' dz = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)dt = (F \circ \gamma)\big|_a^b = F(z_1) - F(z_0) \clubsuit$$

Seja Ω conexo. Pela Proposição 10.5, se $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ é tal que $F' \equiv 0$ então F é constante [cheque]. Duas primitivas de $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, se existirem, diferem por uma constante [cheque]. Vide também Proposição 8.1.

O triângulo convexo e fechado determinado por z_1, z_2 e z_3 (todos em $\mathbb{C}$) é

$$\Delta = \{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 : \ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0 \text{ e } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq 1\}.$$

10.6 Teorema. *Seja $f : B(a;r) \to \mathbb{C}$, com $r > 0$, contínua e satisfazendo*

$$\int_{\partial\Delta} f(w)dw = 0$$

para todo triângulo Δ contido em $B(a;r)$. Dado z em tal bola, definamos

$$F(z) = \int_a^z f(w)dw \quad [\textit{a integral de } f \textit{ sobre } \sigma(t) = a+t(z-a),\ 0 \leq t \leq 1].$$

Então, F é holomorfa e

$$F' = f.$$

Vale um resultado análogo para retângulos (com lados paralelos aos eixos).

Prova. Em duas partes.

Podemos supor $a = 0$ [cheque]. Sejam z e $z+h$ distintos em $B(0;r)$.

- Seja Δ o triângulo de vértices 0, $z+h$ e z, orientado de 0 a $z+h$, de $z+h$ a z e de z a 0.

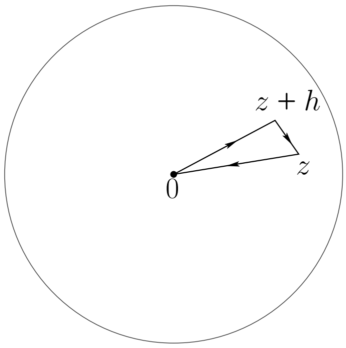

Figura 10.2: O caso "integral nula ao longo da fronteira de triângulos"

Seja $\sigma(t) = z + th$, onde $t \in [0,1]$. Então,

$$0 = \int_{\partial\Delta} f dw = F(z+h) - \int_\sigma f dw - F(z).$$

Logo, devido à continuidade de f,

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{\int_0^1 f(z+th)h dt}{h} = \int_0^1 f(z+th)dt \xrightarrow{h\to 0} f(z).$$

◇ Para retângulos, definimos

$$\int_{\alpha}^{\beta} f dw$$

pela integração ao longo de um segmento horizontal com ponto inicial α seguida da integração ao longo de um segmento vertical com ponto final β. A seguir, definimos

$$F(z) = \int_0^z f(w)dw.$$

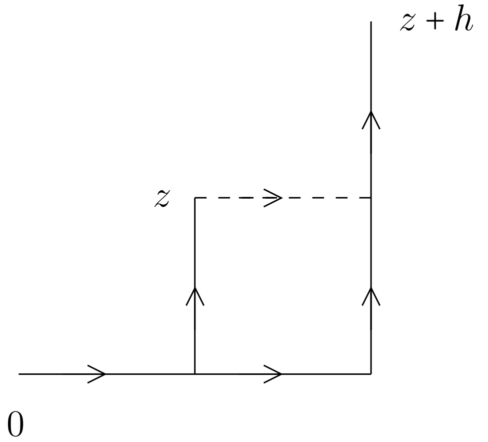

Figura 10.3: O caso "integral nula ao longo da fronteira de retângulos"

Observemos que escrevendo $h = h_1 + ih_2$ então temos

$$\begin{aligned}\int_z^{z+h} 1dw &= \int_z^{z+h_1} 1dw + \int_{z+h_1}^{z+h_1+ih_2} 1dw \\ &= h_1 + ih_2 \\ &= h.\end{aligned}$$

Donde então segue

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_z^{z+h}[f(w) - f(z)]dw.$$

Para encerrar, pela estimativa M-L encontramos

$$\left|\frac{1}{h}\int_z^{z+h}[f(w) - f(z)]dw\right| \le \sup_{w \in D(z;|h|)} |f(w) - f(z)| \xrightarrow{h\to 0} 0 \clubsuit$$

10.7 Teorema (Cauchy-Goursat). *Seja* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorfa. Seja* Δ *um triângulo convexo e fechado contido em* Ω*. Então,*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

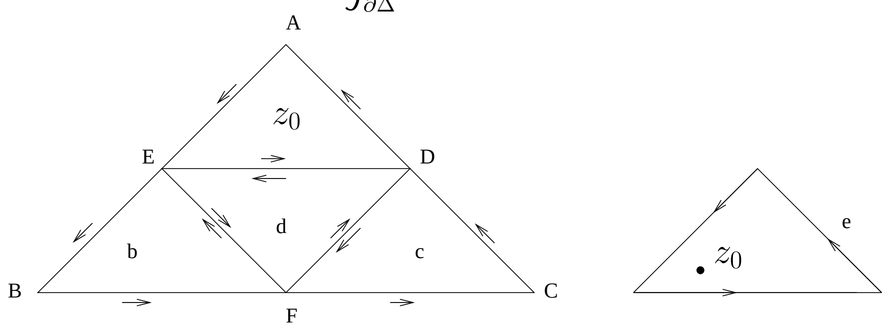

Figura 10.4: Teorema de Cauchy-Goursat

Prova.

Iniciemos (v. figura 10.1) orientando $\partial\Delta$ no sentido anti-horário e descrevendo $\partial\Delta$ pela justaposição de segmentos $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3$. Destacando os pontos médios dos lados de $\partial\Delta$ e unindo tais pontos por segmentos de reta obtemos quatro triângulos na região Δ: Δ_1, Δ_2, Δ_3 e Δ_4. Orientamos a fronteira de cada um desses triângulos também no sentido anti-horário. Assim temos,

$$\int_{\partial\Delta} f dz = \int_{\partial\Delta_1} f dz + \int_{\partial\Delta_2} f dz + \int_{\partial\Delta_3} f dz + \int_{\partial\Delta_4} f dz.$$

Destaquemos, entre as integrais no segundo membro, a de maior módulo e $\Delta^{(1)}$ o respectivo triângulo. Para $\Delta^{(1)}$, analogamente escrevemos a integral em $\partial\Delta^{(1)}$ como soma de quatro integrais sobre a fronteira de quatro triângulos formados a partir dos pontos médios de $\partial\Delta^{(1)}$ e com orientação anti-horária e destacamos $\partial\Delta^{(2)}$, cuja respectiva integral tem maior módulo. Iterando, obtemos uma sequência $(\Delta^{(n)})_{\mathbb{N}}$ com $\Delta^{(0)} = \Delta$. Seja $\delta^{(n)}$ o comprimento do maior lado de $\Delta^{(n)}$ e $\delta = \delta^{(0)}$. Temos então, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\Delta^{(n+1)} \subset \Delta^{(n)},$$

$$\left|\int_{\partial\Delta} f dz\right| \le 4^n \left|\int_{\partial\Delta^{(n)}} f dz\right|,$$

$$L\big(\partial\Delta^{(n)}\big) = \frac{L(\partial\Delta)}{2^n},$$

$$\delta^{(n)} = \frac{\delta}{2^n}.$$

A sequência dos triângulos compactos $\Delta^{(n)}$ é decrescente (ordenada pela inclusão) e o diâmetro [i.e., o sup das distâncias entre dois pontos quaisquer de um conjunto] dessas regiões é $\delta^{(n)}$ e

$$\delta^{(n)} \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Donde, a intersecção desses compactos é um ponto z_0 [Princípio dos Intervalos Encaixantes, cheque].

A seguir, destaquemos que dado $\epsilon > 0$ existe $\tau > 0$ tal que

(a) $B(z_0;\tau) \subset \Omega$

(b) Se $0 < |z - z_0| < \tau$, então

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \epsilon.$$

Sendo que (b) equivale a

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \epsilon|z - z_0|, \quad \text{se } 0 < |z - z_0| < \tau.$$

Se n é suficientemente grande tal que

$$\delta^{(n)} = \frac{\delta}{2^n} < \tau,$$

então $\Delta^{(n)}$ está contido em $B(z_0;\tau)$. Ainda mais, notando que

$$\int_{\partial\Delta^{(n)}} dz = 0 = \int_{\partial\Delta^{(n)}} z dz$$

temos

$$\int_{\partial\Delta^{(n)}} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)] dz = \int_{\partial\Delta^{(n)}} f dz.$$

Pela última equação, pela última inequação e pela estimativa M-L segue

$$\left|\int_{\partial\Delta^{(n)}} f dz\right| \le \epsilon\delta^{(n)} L(\partial\Delta^{(n)}) = \frac{\epsilon\delta L(\partial\Delta)}{4^n}$$

e então

$$\left|\int_{\partial\Delta} f dz\right| \le 4^n \left|\int_{\partial\Delta^{(n)}} f dz\right| \le \epsilon\delta L(\partial\Delta) \clubsuit$$

O Teorema de Cauchy, a seguir, estabelece que sob certas condições temos

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Este é um dos resultados centrais da análise complexa. Existe uma variedade de condições para provar tal resultado mas em todos é assumido que f é holomorfa ou analítica em um aberto Ω. As demais condições são topológicas (geométricas) e estão relacionadas com o aberto Ω (e.g., conjuntos simples tais como bolas abertas, triângulos abertos, retângulos abertos, etc. ou abertos menos simples) e com a curva γ (ou ciclo, como no enunciado do Teorema de Cauchy Homológico).

As versões simples do Teorema de Cauchy já são suficientes para demonstrar a fórmula integral de Cauchy e então que toda função holomorfa é analítica. Entretanto, como já estudamos um pouco conjuntos simplesmente conexos (o suficiente para provar o Teorema da Aplicação Riemann), podemos imediatamente apresentar uma versão do Teorema de Cauchy (independente do teorema da aplicação de Riemann) que é razoavelmente abrangente do ponto de vista da teoria da homotopia. O resultado a seguir (Teorema 10.8) tem importância por si só e será utilizado na demonstração do Teorema de Cauchy Homotópico.

Notemos que se f é holomorfa num aberto Ω e tem primitiva local e γ é uma curva em Ω e de classe C^1 por partes, então com a notação da Definição 8.2 temos

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}[g_k(\gamma(a_k))-g_k(\gamma(a_{k-1}))] = \sum(f;\gamma). \tag{10.8.1}$$

10.8 Teorema. *Seja Ω um aberto simplesmente conexo e $f:\Omega\to\mathbb{C}$ holomorfa.*

- *Fixemos α em Ω. Dado um ponto z em Ω, seja γ uma curva arbitrária em Ω e de classe C^1, de início α e ponto final z. Então, a integral*

$$F(z) = \int_\gamma f(w)dw$$

independe de γ. Ainda, F é uma primitiva (global) de f.

- *Se η é uma curva em Ω, fechada e C^1 por partes, então*

(Teorema de Cauchy) $$\int_\eta f(w)dw = 0.$$

Prova.

- ◇ Pelo Teorema de Cauchy-Goursat e o Teorema 10.6 segue que f tem uma primitiva local. Pelo Teorema 8.7 [existência de primitiva global se existe primitiva local, em abertos simplesmente conexos] temos que

$$F(z) = \sum(f;\gamma)$$

independe de γ e é primitiva global de f. Pela identidade (10.8.1) segue

$$F(z) = \int_\gamma f(w)dw.$$

- ◇ Pela Proposição 10.5 obtemos

$$\int_\eta f dw = 0 \clubsuit$$

Apresentemos o clássico Teorema de Cauchy Homotópico, enunciado para funções holomorfas e curvas C^1 por partes.

10.9 Teorema de Cauchy Homotópico. *Sejam*

$$\gamma_0 : [a,b] \to \Omega \quad e \quad \gamma_0 : [a,b] \to \Omega$$

duas curvas de classe C^1 por partes e homotópicas em Ω, com mesmo ponto inicial e mesmo ponto final ou, caso contrário, ambas fechadas. Seja

$$f : \Omega \to \mathbb{C}, \text{ holomorfa em } \Omega.$$

Então temos

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Em particular, se γ_0 é homotópica a um ponto,

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = 0.$$

Prova.

Pelo teorema de Cauchy- Goursat e o teorema 10.6, a função f tem primitiva local. A conclusão é trivial e segue do Teorema 8.6 [o teorema de Cauchy homotópico para funções com primitiva local] e da identidade (10.8.1)$\clubsuit$

10.4 - A Fórmula Integral do Índice e a Fórmula Integral de Cauchy

10.10 Teorema. *Seja* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ *fechada e* C^1 *por partes e* $a \notin Imagem(\gamma)$. *Então,*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = Ind_\gamma(a).$$

Prova.

Pelo Corolário 7.12 existem duas funções, ambas de classe C^1 por partes, $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ e $r : [0,1] \to (0,+\infty)$ satisfazendo

$$\gamma(t) - a = r(t)e^{i\theta(t)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{dz}{z-a} &= \int_0^1 \frac{r'(t)e^{i\theta(t)} + r(t)i\theta'(t)e^{i\theta(t)}}{r(t)e^{i\theta(t)}}dt \\ &= \int_0^1 \frac{r'(t)}{r(t)}dt + i\int_0^1 \theta'(t)dt \\ &= \ln r(t)\Big|_0^1 + i[\theta(1) - \theta(0)]. \\ &= 0 + 2\pi i \mathrm{Ind}_\gamma(a) \clubsuit\end{aligned}$$

10.11 Teorema (Fórmula Integral de Cauchy). *Sejam* Ω *um aberto convexo,* f *holomorfa em* Ω *e uma curva* $\gamma : [0,1] \to \Omega$ *fechada e* C^1 *por partes. Se* $a \in \Omega \setminus Imagem(\gamma)$ *então*

$$f(a)Ind_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz.$$

Prova.

Seja $r > 0$ tal que $D(a;r) \subset \Omega \setminus \mathrm{Imagem}(\gamma)$. Definamos

$$\begin{cases} \sigma(t) = \sigma_r(t) & = a + r\frac{\gamma(t)-a}{|\gamma(t)-a|}, \text{ para } 0 \le t \le 1, \\ \\ H(t,s) & = s\sigma(t) + (1-s)\gamma(t) \in \Omega \setminus D\left(a; \frac{r}{2}\right), \text{ para } 0 \le s, t \le 1. \end{cases}$$

[Mostre que H está bem definida, vide Figura 10.5.]

Então, H é uma homotopia entre as curvas fechadas γ e σ com a homotopia realizada no aberto $\Omega \setminus D(a;r/2)$. Ainda,

$$z \mapsto \frac{f(z)}{z-a} \text{ e } z \mapsto \frac{1}{z-a} \text{ são holomorfas em } \ \Omega \setminus D\Big(a;\frac{r}{2}\Big).$$

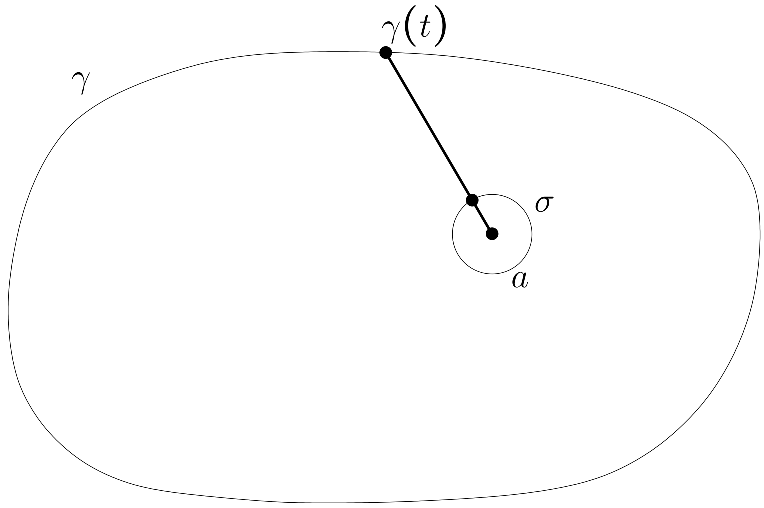

Figura 10.5: Fórmula Integral de Cauchy

Pelo teorema de Cauchy homotópico (10.9) segue

$$\int_\gamma \frac{f(z)dz}{z-a} = \int_\sigma \frac{f(z)dz}{z-a} \quad \text{e} \quad \int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \int_\sigma \frac{dz}{z-a}.$$

Por tais identidades e a forma integral do índice segue

$$\int_\gamma \frac{f(z)dz}{z-a} = \int_\sigma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz + f(a)\mathrm{Ind}_\gamma(a)2\pi i.$$

Seja L o comprimento da curva

$$t \mapsto \frac{\gamma(t)-a}{|\gamma(t)-a|}.$$

O comprimento de σ é rL. Pela estimativa M-L, com r pequeno o suficiente,

$$\left|\int_\sigma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz\right| \leq (|f'(a)|+1)rL \xrightarrow{r\to 0^+} 0♣$$

Comentários.

- Pela fórmula integral de Cauchy (Teorema 10.11), localmente representamos uma função holomorfa por uma integral (dependendo de um parâmetro). São então bastante úteis resultados sobre derivação sob o sinal de integração.

- A prova do próximo Teorema 10.13 independe deste particular comentário. Mantidas as demais hipóteses no Teorema 10.11, suponhamos $\text{Ind}(\gamma; a) = 1$. Pelo Teorema 10.11 segue
$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz.$$
Por motivos psicológicos, troquemos z por w e a por z. Então, temos
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw.$$
Donde então segue,
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt.$$
Definindo $F(z,t)$ pelo integrando acima, escrevemos
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 F(z,t)dt$$
[uma família de integrais dependendo de um parâmetro complexo].

  Notemos que $F(z,t)$ é continua em $\{z \in \Omega : \text{Ind}(\gamma; z) = 1\} \times [0,1]$. O mesmo vale para $(\partial F/\partial z)(z,t)$. Desta forma, pelo Teorema 10.4 segue [cheque]
$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\partial F}{\partial z}(z,t)dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2}dw \clubsuit$$

No que segue usaremos o trivial resultado abaixo.

10.12 Lema. *Seja γ uma curva C^1 por partes e f_n : Imagem$(\gamma) \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de funções contínuas convergindo uniformemente a f : Imagem$(\gamma) \to \mathbb{C}$. Então,*
$$\int_\gamma f_n(z)dz \xrightarrow{n\to+\infty} \int_\gamma f(z)dz.$$

Prova.

Segue de $|f_n(\gamma(t))\gamma'(t) - f(\gamma(t))\gamma'(t)| \leq |f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))|M$, para todos $n \geq 1$ e t no domínio de γ, onde $M = \max\{|\gamma'(t)| : \ t \in \ \text{domínio}(\gamma)\}\clubsuit$

10.13 Teorema. *Sejam $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, um ponto a em Ω e $d = d(a; \mathbb{C} \smallsetminus \Omega)$.*

(a) Para todo $z \in B(a; d)$ temos

$$f(z) = \sum c_n (z-a)^n\,, \text{ com } c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \text{ para todo } n \geq 0.$$

(b) Seja r tal que $0 < r < d$. Vale a Fórmula Integral de Cauchy para as Derivadas,

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz, \text{ para todo } n \geq 0.$$

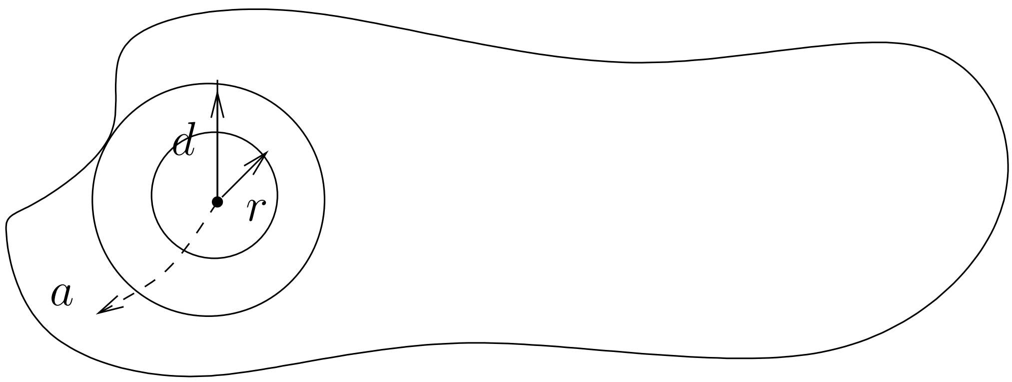

Figura 10.6: Ilustração ao Teorema 10.13

Prova.

É claro que $d > 0$, pois a não pertence ao fechado $\mathbb{C} \smallsetminus \Omega$.

(a) e (b). Fixemos r tal que $0 < r < d$ e z tal que $|z-a| < r$. Definindo a curva

$$\gamma_r(\theta) = a + re^{i\theta}, \quad \text{onde } \theta \in [0, 2\pi] \ \text{(vide figura)},$$

pela fórmula de Cauchy segue

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z}\, dw.$$

Temos

$$\frac{|z-a|}{|w-a|} < 1 \ \text{ para todo } \ w \text{ em Imagem}(\gamma_r) = S_r(a).$$

Pelo Teste-M [com a série de majorantes dada pela série geométrica de razão $(|z-a|/r) < 1$ e convergente], a série de funções na variável w obtidas de

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{(w-a)^{-1}}{1-\frac{z-a}{w-a}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}},$$

converge uniformemente sobre a circunferência $S_r(a)$.

Como f é contínua e limitada na circunferência $S_r(a)$ obtemos

$$\frac{f(w)}{w-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}},$$

com convergência uniforme na variável w e sobre a circunferência $S_r(a)$. Pelo já mostrado acima e pelo Lema 10.12 segue

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw\right)(z-a)^n.$$

Isto é, expandimos f em uma série de potências centrada em a e convergente em $B(a;r)$, para todo $0 < r < d$. Como sabemos que

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

temos também a fórmula integral de Cauchy para as derivadas♣

10.14 Corolário. $\mathcal{H}(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega)$.

Prova. Trivial, pois já vimos que $\mathcal{A}(\Omega) \subset \mathcal{H}(\Omega)$♣

10.15 Fórmula para o Valor Médio (Gauss). *Seja* $f \in \mathcal{H}\big(B(a;R)\big)$. *Então,*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\,d\theta, \text{ para todo } 0 < r < R.$$

Prova.

Basta desenvolver

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a}dz, \text{ onde } \gamma_r(\theta) = a + re^{i\theta} \text{ e } \theta \in [0, 2\pi]♣$$

10.5 - O Teorema de Cauchy Homológico (Teorema Global de Cauchy)

Dado um aberto, para quais curvas o teorema de Cauchy é válido? O teorema de Cauchy homotópico responde parcialmente tal questão. Para avançar na resposta generalizamos a noção de integral de linha. Por exemplo, dada

$$\gamma = \gamma_1 \vee \cdots \vee \gamma_n$$

de classe C^1 por partes, com cada γ_j de classe C^1, temos

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)dz. \tag{10.5.1}$$

Assim (e informalmente), é natural considerar a soma formal finita

$$\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n.$$

Tais somas formais (finitas) são chamadas cadeias.

Informalmente, a soma de duas cadeias $\gamma_1 + \cdots + \gamma_n$ e $\eta_1 + \cdots + \eta_m$ é feita naturalmente, simplesmente somando livremente. Isto é,

$$(\gamma_1 + \cdots + \gamma_n) + (\eta_1 + \cdots + \eta_m) = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n + \eta_1 + \cdots + \eta_m.$$

A propriedade aditiva (10.5.1) para curvas também vale para uma cadeia.

Curvas idênticas são naturalmente adicionadas, e denotamos a soma por um múltiplo.

O oposto (reverso) de uma curva γ é indicado por $-\gamma$. Isto é, indicamos a curva reversa γ^- por

$$(-1)\gamma = -\gamma.$$

Assim, dado $m \in \{1, \ldots, \}$ temos

$$m(-\gamma) = -m\gamma.$$

Com tal notação toda cadeia Γ pode ser escrita na forma

$$\Gamma = m_1\gamma_1 + \cdots + m_n\gamma_n, \text{ com cada } m_j \in \mathbb{Z}.$$

Parcelas com coeficiente zero podem ser introduzidas à vontade. Isto permite descrever duas cadeias em termos das mesmas curvas e somar as cadeias via coeficientes. A cadeia nula tem todos os coeficientes nulos.

É bastante útil interpretar uma curva γ e uma cadeia $\Gamma = m_1\gamma_1 + \cdots + m_n\gamma_n$, onde todas estas curvas são de classe C^1 por partes e com imagens em um aberto Ω e os números $m, m_1, \ldots, m_n$ são inteiros, como funcionais lineares definidos sobre o espaço vetorial

$$C(\Omega;\mathbb{C}) = \{f : \Omega \to \mathbb{C},\ \text{onde } f \text{ é contínua}\}.$$

Definimos então o funcional linear T_γ por

$$T_\gamma(f) = \int_\gamma f(z)dz, \quad \text{para cada } f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ contínua.}$$

Evidentemente, desejamos a propriedade aditiva

$$T_\Gamma(f) = \int_\Gamma f dz = \int_{m_1\gamma_1+\cdots+m_n\gamma_n} f dz = m_1 \int_{\gamma_1} f dz + \cdots + m_n \int_{\gamma_n} f dz.$$

Sendo assim, definimos a operação

$$T_\Gamma = m_1 T_{\gamma_1} + \cdots + m_n T_{\gamma_n}.$$

Observemos que, para uma arbitrária $f : \Omega \to \mathbb{C}$ contínua,

$$T_{0\gamma}(f) = 0 \int_\gamma f dz = 0 \text{ e}$$

$$T_{-\gamma}(f) = \int_{-\gamma} f dz = \int_{\gamma^-} f dz = -\int_\gamma f dz = -T_\gamma(f).$$

ATENÇÃO. Devemos evitar confundir cadeia com curva. Notemos que dada uma curva γ arbitrária, de forma geral o funcional linear

$$T_\gamma + T_\gamma \ \text{ associado à cadeia } \ 2\gamma = \gamma + \gamma$$

é diferente do funcional linear

$$T_\sigma \ \text{ associado à curva } \sigma(t) = 2\gamma(t).$$

Resumindo, se γ não é nula então

$$\text{cadeia } 2\gamma \ \neq \ \text{curva } 2\gamma.$$

O conceito adequado para justificar tais interpretações e operações é o de grupo abeliano (comutativo) livre. A seguir, definimos cadeia e ciclo.

10.16 Definição. *Uma* cadeia *é um elemento do* grupo abeliano livre *gerado pelo conjunto $\mathcal{C}^1$ das curvas de classe C^1 por partes definidas em intervalos compactos não triviais. Indicamos tal grupo por $\mathbb{Z}^{(\mathcal{C}^1)}$. Precisamente, temos*

$$\mathbb{Z}^{(\mathcal{C}^1)} = \{\Gamma : \mathcal{C}^1 \to \mathbb{Z} \text{ tais que } \Gamma \text{ é nula, exceto numa quantidade finita de curvas}\}$$

munido da usual operação adição de funções efetuada ponto a ponto. Por último, um ciclo *é uma cadeia em que cada curva é fechada.*

Usualmente, uma cadeia é identificada com uma soma formal $\Gamma = \sum_J m_j\gamma_j$, com J um conjunto de índices, coeficientes $m_j \in \mathbb{Z}$ para cada j em J, curvas $\gamma_j \in \mathcal{C}^1$ para cada j, sob a condição $m_j = 0$ exceto para uma quantidade finita de índices.

Facilitando a notação, uma cadeia é dada por uma soma finita

$$\Gamma = m_1\gamma_1 + \cdots + m_n\gamma_n$$

com $m_1, \ldots, m_n$ números inteiros e $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ curvas no conjunto $\mathcal{C}^1$.

A imagem da cadeia $\Gamma = m_1\gamma_1 + \cdots + m_n\gamma_n$ é

$$\text{Imagem}(\Gamma) = \bigcup_{j=1}^{n} \text{Imagem}(\gamma_j).$$

Se $\text{Imagem}(\Gamma) \subset \Omega$, dizemos que Γ é uma cadeia em Ω.

Se $f : \text{Imagem}(\Gamma) \to \mathbb{C}$ é uma função contínua, definimos

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} m_j \int_{\gamma_j} f(z)dz.$$

A cadeia oposta de Γ é

$$-\Gamma = \sum_{j=1}^{n}(-m_j)\gamma_j.$$

[Observemos que introduzindo o conceito de cadeia reversa

$$\Gamma^- = \sum_{j=1}^{n} m_j\gamma_j^-,$$

então obtemos

$$\Gamma^- = -\Gamma.]$$

Se α não pertence a Imagem(Γ), o índice de α em relação a Γ é

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{z-\alpha}dz.$$

Intuitivamente, uma curva fechada $\gamma : [a,b] \to \Omega$ é homóloga a 0 em Ω se γ não contorna pontos no complementar de Ω. Formalmente, γ é homóloga a 0 em Ω se

$$\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha) = 0, \text{ para todo } \alpha \text{ no complementar de } \Omega.$$

Notação. Se γ é homóloga a 0 em Ω, escrevemos

$$\gamma \sim 0 \text{ (em } \Omega).$$

Analogamente, um ciclo Γ é Ω-homólogo a 0 se $\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0$ para todo α em $\mathbb{C}\setminus\Omega$.
Notação: $\Gamma \sim 0$ (em Ω).

Dois ciclos Γ_1 e Γ_2 são homólogos em Ω se

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_2}(\alpha), \text{ para todo } \alpha \text{ no complementar de } \Omega.$$

Notação. Se Γ_1 e Γ_2 são homólogos em Ω, escrevemos

$$\Gamma_1 \sim \Gamma_2 \text{ (em } \Omega).$$

Destaquemos que temos

$$\Gamma_1 \sim \Gamma_2, \text{ em } \Omega, \text{ se e somente se temos } \Gamma_1 - \Gamma_2 \sim 0 \text{ em } \Omega.$$

Dados dois ciclos Γ_1 e Γ_2 em Ω, é trivial e importante a propriedade

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma_1+\Gamma_2}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(\alpha) + \mathrm{Ind}_{\Gamma_2}(\alpha), \text{ se } \alpha \notin \text{ Imagem}(\Gamma_1+\Gamma_2).$$

A versão mais geral do Teorema de Cauchy vale para um aberto Ω qualquer e mostra uma iteração entre Ω e o ciclo Γ. Veremos que o par (Ω,Γ) satisfaz

$$\int_\Gamma f dz = 0, \text{para toda } f \in \mathcal{H}(\Omega).$$

se e somente temos

$$\mathrm{Ind}_\Gamma \equiv 0 \text{ no complementar de } \Omega.$$

10.17 Teorema de Cauchy Homológico. *Seja Ω um aberto arbitrário e Γ um ciclo homólogo a 0 em Ω. Seja f holomorfa em Ω e α um ponto em Ω mas não em Imagem(Γ). Então,*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-\alpha}dz = f(\alpha)Ind_\Gamma(\alpha) \qquad e \qquad \int_\Gamma f(z)dz = 0.$$

Ainda, se Γ_1 e Γ_2 são ciclos homólogos em Ω, então

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz.$$

Prova. [Baseada em Dixon (1971), mas evitando teoremas de Morera e Fubini.]

Dividamos a prova em partes. Consideremos

$$g(z,w) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & \text{se } z \neq w, \\ f'(w) & \text{se } z = w. \end{cases}$$

- O complementar da diagonal de $\Omega \times \Omega$ é um aberto. É trivial ver que neste aberto g é contínua e que $\frac{\partial g}{\partial z}$ existe e é contínua.

- Seja (a,a) na diagonal de $\Omega \times \Omega$ e $B(a;r)$, com $r > 0$, contida em Ω.

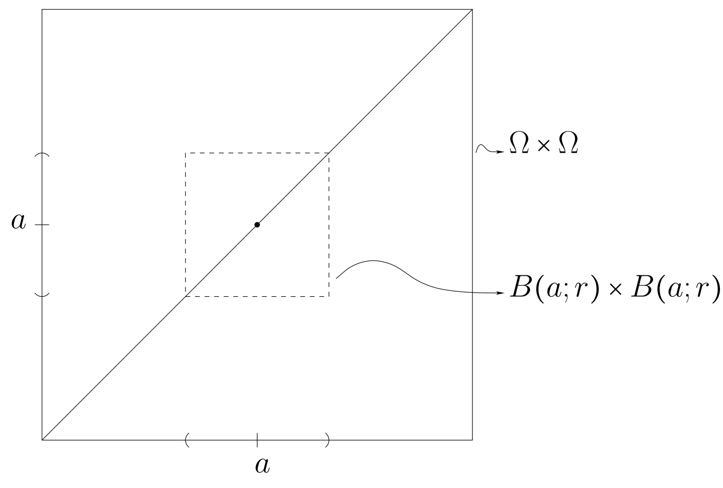

Figura 10.7: Prova de Dixon

Para (z,w) arbitrário em $B(a;r) \times B(a;r)$ temos [Proposição 10.3(B)]

$$f(z) - f(w) = (z-w)\int_0^1 f'\big(w + t(z-w)\big)dt.$$

Donde segue

$$g(z,w) = \int_0^1 f'(w + t(z-w))dt, \text{ para todo } (z,w) \in B(a;r) \times B(a;r).$$

Definindo

$$\varphi(z,w,t) = f'(w + t(z - w)) \text{ para } (z,w,t) \in B(a;r) \times B(a;r) \times [0,1],$$

temos que φ e $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ são contínuas em $B(a;r) \times B(a;r) \times [0,1]$. Pela regra de Leibnitz complexa, as funções g e $\frac{\partial g}{\partial z}$ são contínuas em $B(a;r) \times B(a;r)$. Em suma, g e $\frac{\partial g}{\partial z}$ são contínuas em $\Omega \times \Omega$.

Consideremos o aberto [verifique]

$$V = \{z \in \mathbb{C} : z \text{ não está em Imagem}(\Gamma) \text{ e } \mathrm{Ind}(\Gamma; z) = 0\}.$$

Devido às hipóteses, V contém $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Logo, $\mathbb{C} = \Omega \cup V$. Definamos então

$$h(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} g(z,w)dw & \text{se } z \in \Omega, \\ \\ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw & \text{se } z \in V. \end{cases}$$

Dado z na intersecção $\Omega \cap V$ temos

$$\int_\Gamma \frac{dw}{z - w} = 0$$

e então o valor das integrais na definição de $h(z)$ coincidem e h é bem posta.

- A função h é inteira. Pela regra de Leibnitz complexa [já vimos que g e $\partial g/\partial z$ são contínuas em $\Omega \times \Omega$] segue que h é derivável em Ω e em V também.

- h é nula. Por propriedade do índice, V contém o complementar de um disco compacto contendo Imagem(Γ). Para z^* neste complementar temos

$$h(z^*) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z^*} dw.$$

Seja $\gamma : [c,d] \to \Omega$ uma curva do ciclo Γ. Então,

$$\left| \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z^*} dw \right| \leq \frac{1}{d[z^*; \text{Imagem}(\gamma)]} \int_c^d |f(\gamma(t))\gamma'(t)| dt \xrightarrow{|z^*| \to \infty} 0.$$

Logo, $h(z^*) \xrightarrow{|z^*| \to \infty} 0$ e h é limitada. Pelo teorema de Liouville segue $h \equiv 0$.

◇ Verificação das fórmulas anunciadas. Dado $\alpha \in \Omega \setminus \text{Imagem}(\Gamma)$ temos

$$0 = h(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-\alpha}dz - f(\alpha)\text{Ind}_\Gamma(\alpha).$$

Está então provada a primeira fórmula para toda função holomorfa em Ω. Para a segunda fórmula, utilizando a primeira fórmula obtemos

$$\int_\Gamma f dz = \int_\Gamma \frac{(z-\alpha)f(z)}{z-\alpha}dz = 2\pi i(\alpha-\alpha)f(\alpha)\text{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0.$$

Paa a terceira fórmula basta aplicar a segunda ao ciclo $\Gamma_1 - \Gamma_2 \sim 0$ em Ω♣

O corolário a seguir é equivalente ao teorema acima e é também chamado Teorema de Cauchy Homológico.

10.18 Corolário (Teorema de Cauchy Homológico). *Seja Ω um aberto e Γ um ciclo em Ω. Então, temos*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0, \text{ para toda } f \in \mathcal{H}(\Omega) \iff \Gamma \sim 0 \text{ em } \Omega.$$

Prova.

($\Rightarrow$) Dado α no complementar Ω, seja

$$f(z) = \frac{1}{z-\alpha} \in \mathcal{H}(\Omega).$$

Por hipótese,

$$0 = \int_\Gamma f dz = \int_\Gamma \frac{dz}{z-\alpha} = \text{Ind}(\Gamma;\alpha).$$

($\Leftarrow$) Segue do Teorema 10.17 (também Cauchy homológico)♣

Assim, mostramos que o Teorema 10.17 implica o Corolário 10.18. Inversamente, supondo válido o Corolário 1.18, sejam

$$f \in \mathcal{H}(\Omega), \text{ um ciclo } \Gamma \sim 0 \text{ em } \Omega \text{ e um ponto } \alpha \in \Omega \setminus \text{Imagem}(\Gamma).$$

Expandindo f em séries de potências em torno de α concluímos que a função

$$z \mapsto \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}$$

é analítica em Ω e assim, o Corolário 10.18 garante

$$\int_\Gamma \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} dz = 0.$$

Isto prova que o Corolário 10.18 implica o Teorema 10.17.

Interpretação para o Corolário 10.18. Temos

$$\int_\Gamma f dz = 0, \quad \text{para toda f } \in \mathcal{H}(\Omega),$$

se e só se o interior do ciclo Γ está contido em Ω. Recordemos que, algebricamente, o interior de Γ é o conjunto dos pontos α tais que $\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) \neq 0$.

Exemplo para o Teorema de Cauchy homológico. Consideremos um aberto Ω conexo e limitado tal que seu complementar tem uma componente conexa ilimitada e três pontos como os hachurados em preto na figura abaixo (isto é, tais três pontos não pertencem a Ω). Pela figura, a curva γ dá uma volta em torno de cada um dos três pontos. As pequenos curvas circulares γ_1, γ_2 e γ_3 dão uma volta, cada uma, em torno de seus respectivos centros. É fácil ver que

$$\gamma \sim \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3, \text{ em } \Omega.$$

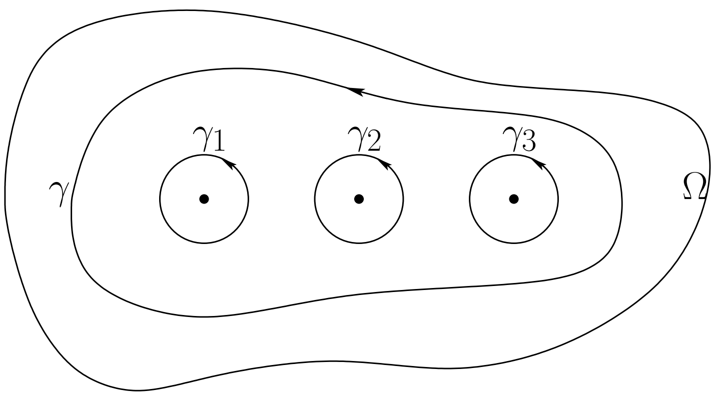

Figura 10.8: Ilustração ao Teorema 10.17

Então, dada f holomorfa em Ω, pelo teorema de Cauchy homológico temos

$$\int_\gamma f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz + \int_{\gamma_3} f dz \clubsuit$$

10.6 - O Teorema de Morera e o Princípio da Reflexão de Schwarz

10.19 Teorema (Morera). *Seja* $f : B(a;r) \to \mathbb{C}$*, com* $r > 0$*, contínua e tal que*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

para todos os triângulos Δ*, convexos e fechados, contidos em* $B(a;r)$*. Então,* f *é holomorfa.*

Vale um resultado análogo para retângulos (convexos, fechados e com lados paralelos aos eixos) contidos em $B(a;r)$*.*

Prova.

Pelo Teorema 10.6, existe F com $F' = f$. Pelo Corolário 10.14, f é holomorfa♣

Dado um conjunto $X \subset \mathbb{C}$, definimos

$$C(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ tal que } f \text{ é contínua}\}.$$

Suponhamos Ω simétrico em relação ao eixo real e $I = \Omega \cap \mathbb{R} \neq \varnothing$. Definimos

$$\Omega^+ = \{z \in \Omega : \mathrm{Im}(z) > 0\} \quad \text{e} \quad \Omega^- = \{z \in \Omega : \mathrm{Im}(z) < 0\}.$$

Assim,

$$\Omega = \Omega^+ \uplus I \uplus \Omega^-.$$

10.20 Teorema. *Seja* $f \in C(\Omega) \cap \mathcal{H}(\Omega^+ \uplus \Omega^-)$*. Então,* f *é holomorfa em* Ω*.*

Prova.

Seja R um retângulo fechado convexo, de lados paralelos aos eixos e em Ω. Analisemos três casos.

- ⋄ Se $R \subset \Omega^+$ ou $R \subset \Omega^-$, pelo teorema de Cauchy-Goursat (10.7) ou o de Cauchy (10.8) ou o de Cauchy homotópico (10.9) obtemos

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0.$$

- $\diamond$ Se $R = \{x + iy : a \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq y \leq c\}$, seja $R_\epsilon = \{x + iy : a \leq x \leq b \text{ e } \epsilon \leq y \leq c\}$, $\epsilon > 0$.

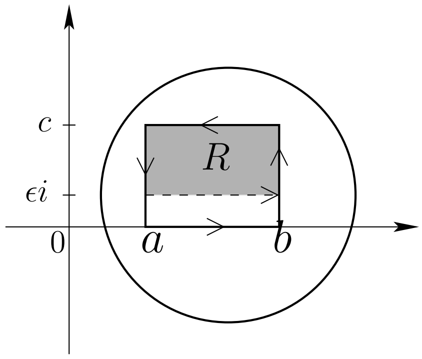

Figura 10.9: Ilustração ao segundo caso

Então, f é uniformemente contínua em $R \supset R_\epsilon$ e para $\epsilon \to 0^+$ temos

$$\int_\epsilon^c f(a+iy)dy \to \int_0^c f(a+iy)dy, \quad \int_\epsilon^c f(b+iy)dy \to \int_0^c f(b+iy)dy,$$

$$\int_a^b f(x+i\epsilon)dx \to \int_a^b f(x)dx \quad \text{e} \quad 0 = \int_{\partial R_\epsilon} f \to \int_{\partial R} f.$$

- $\diamond$ Se R intersecta Ω^+ e Ω^-, então R é a união de dois retângulos fechados R^+ e R^-, respectivamente contidos (exceto por um segmento comum a ambos e no eixo real) em Ω^+ e Ω^-.

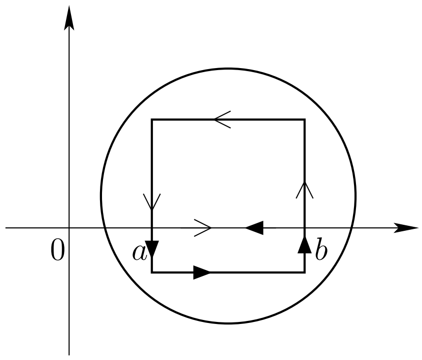

Figura 10.10: Ilustração ao terceiro caso

Analogamente ao segundo caso, encontramos

$$\int_{\partial R^-} f = 0 = \int_{\partial R^+} f.$$

Portanto,

$$\int_{\partial R} f = \int_{\partial R^+} f + \int_{\partial R^-} f = 0.$$

Pelo Teorema de Morera segue que f é holomorfa$\clubsuit$

10.21 Corolário (Princípio da Reflexão de Schwarz). *Seja f uma função contínua em $\Omega^+ \cup I$, holomorfa em Ω^+ e assumindo valores reais em I. Então,*

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & se\ z \in \Omega^+ \cup I \\ \overline{f(\overline{z})}, & se\ z \in \Omega^- \cup I, \end{cases}$$

é uma extensão holomorfa de f ao aberto Ω. Se Ω é conexo, tal extensão é única.

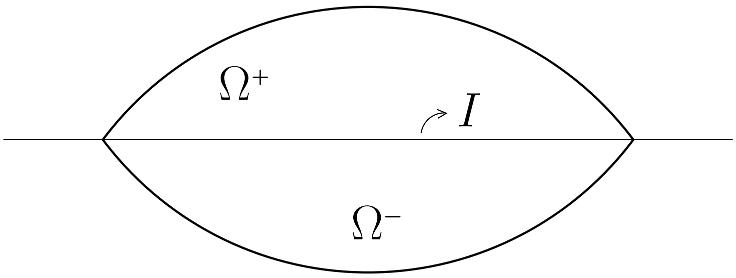

Figura 10.11: Princípio da Reflexão de Schwarz

Prova.

Como $f(x)$ é real, para todo $x \in I$, concluímos que F está bem definida. Pela definição, F é contínua em $\Omega^+ \cup I$ e holomorfa em Ω^+.

Ainda, dado w em Ω^-, temos $f(\zeta) = \sum a_n(\zeta - \overline{w})$ em alguma bola $B(\overline{w}; r)$ não degenerada. Donde segue

$$F(z) = \overline{\sum a_n(\overline{z} - \overline{w})} = \sum \overline{a_n}(z - w) \text{ em } B(w; r).$$

Portanto, F é holomorfa em Ω^-.

É claro que F é contínua em $\Omega = \Omega^+ \cup I \cup \Omega^-$. Então, pelo Teorema 10.20 segue que F é holomorfa em Ω.

Se Ω é conexo e G é uma extensão holomorfa de f a Ω, então temos $G = F$ em I. Então, o princípio de identidade (6.5) garante $G = F$ em Ω♣

10.7 - Derivação sob o Sinal de Integração (Própria e Imprópria)

10.22 Teorema (Diferenciação sob o sinal de integração própria). *Seja $f : B(0;1)\times[0,1]\to\mathbb{C}$ contínua e tal que $f(z,t)$ é holomorfa na primeira variável [para cada t fixado]. Suponhamos $\frac{\partial f}{\partial z}(z,t)$ contínua em $B(0;1)\times[0,1]$. Então,*

$$F(z)=\int_0^1 f(z,t)dt$$

é holomorfa em $B(0;1)$ e sua derivada é

$$F'(z)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt.$$

*[*É supérfluo supor $\frac{\partial f}{\partial z}$ contínua. Vide comentário que segue ao teorema.*]*

Prova.

◇ Sejam $n\in\mathbb{N}^*$ e $\epsilon>0$ e $0<r<1$. Consideremos a soma de Riemann

$$S_n(z)=\sum_{j=0}^{n} f\left(z,\frac{j}{n}\right)\frac{1}{n},\quad \text{onde } z\in B(0;1).$$

Pela continuidade uniforme de f em $D(0;r)\times[0,1]$, existe $\delta>0$ tal que

$$|f(z,s)-f(z,t)|<\epsilon\quad \text{se } |s-t|<\delta \text{ e } z\in D(0;r).$$

Suponhamos $1/n<\delta$. Para todo z em $D(0;r)$ temos

$$|S_n(z)-F(z)|=\left|\sum_{j=1}^{n}\int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} f\left(z,\frac{j}{n}\right)dt-\sum_{j=1}^{n}\int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} f(z,t)dt\right|$$
$$\le\sum_{j=1}^{n}\int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}}\epsilon\, dt=\epsilon.$$

Portanto $S_n\to F$ uniformemente em cada $D(0;r)$ e cada S_n é holomorfa.

Pelo teorema da convergência de Weierstrass (6.21), existe F' e

$$S_n'\longrightarrow F' \text{ uniformemente nos compactos de } B(0;1).$$

Em particular, fixado um ponto ζ em $B(0;1)$ temos que

$$S_n'(\zeta)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z}\left(\zeta,\frac{j}{n}\right)\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}F'(\zeta).$$

Pela definição de integral [e a continuidade de $(\partial f)/(\partial z)$] concluímos que

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z}\left(\zeta,\frac{j}{n}\right)\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}\int_0^1\frac{\partial f}{\partial z}(\zeta,t)dt\,\clubsuit$$

Comentário. Seja $f : B(0;1) \times [0,1] \to \mathbb{C}$ contínua, com $f(z,t)$ holomorfa na primeira variável [para cada t]. Mostremos que

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z,t) \ \text{ é contínua em } B(0;1) \times [0,1].$$

Prova.

Suponha $0 < r < 1$. Seja $z \in B(0;r)$. Pela fórmula integral de Cauchy para as derivadas [vide Teorema 10.13 (b)] temos [fixando t como parâmetro]

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w,t)}{(w-z)^2} dw.$$

Escrevamos

$$\begin{aligned} 2\pi i \frac{\partial f}{\partial z}(z,t) &= \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta},t) ire^{i\theta}}{(re^{i\theta}-z)^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} g(z,t,\theta) d\theta, \end{aligned}$$

onde $g(z,t,\theta)$ é o integrando.

A função $g : B(0;r) \times [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ é evidentemente contínua.

Logo, g é uniformemente contínua em $D(0;\rho) \times [0,1] \times [0,2\pi]$ se $0 < \rho < r$. Concluímos então que [cheque, vide a prova do Teorema 10.4 (A)]

$$(z,t) \mapsto \int_0^{2\pi} g(z,t,\theta) d\theta \ \text{ é contínua em } D(0;\rho) \times [0,1],$$

para todo $0 < \rho < r$.

Portanto, $\frac{\partial f}{\partial z}(z,t)$ é contínua em $B(0;r) \times [0,1]$.

Donde segue que

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z,t) \ \text{ é contínua em } B(0;1) \times [0,1] \clubsuit$$

Definição. *Seja* $f : J \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, *onde* $J \subset \mathbb{C}$, *tal que a integral imprópria*

$$\int_0^\infty f(z,t)dt = \lim_{r \to +\infty} \int_0^r f(z,t)dt$$

converge, para todo $z \in J$. *Dizemos que tal integral imprópria [de fato, uma família de integrais impróprias]* converge uniformemente *em* J *[ou que a convergência é uniforme em* J*] se para todo* $\epsilon > 0$ *existe* N *tal que temos*

$$\left| \int_0^r f(z,t)dt - \int_0^\infty f(z,t)dt \right| \leq \epsilon, \quad \text{para quaisquer } r \geq N \text{ e } z \in J,$$

ou, equivalentemente,

$$\left| \int_r^\infty f(z,t)dt \right| \leq \epsilon, \quad \text{para quaisquer } r \geq N \text{ e } z \in J.$$

O resultado abaixo, sobre continuidade e derivação, é de caráter local e então o enunciamos para uma bola ao invés de um aberto .

10.23 Teorema (derivação sob o sinal de integração imprópria). *Seja* $f : B(0;1) \times [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ *contínua e tal que* $f(z,t)$ *é holomorfa na primeira variável [para cada* t *fixado]. Suponha que*

$$\int_0^\infty f(z,t)dt \quad \text{converge uniformemente nos compactos de } \; B(0;1).$$

Vale o que segue.

- *A função* $\frac{\partial f}{\partial z}(z,t)$ *é contínua em* $B(0;1) \times [0, \infty)$.
- *A função*
$$F(z) = \int_0^\infty f(z,t)dt$$
é holomorfa em $B(0;1)$ *e*
$$F'(z) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt.$$

Prova.

- Continuidade de $(\partial f)/(\partial z)$. Devido às hipóteses, a sequência de funções

  $$F_n(z) = \int_0^n f(z,t)dt \text{ converge uniformemente a } F(z) = \int_0^\infty f(z,t)dt,$$

  nos compactos de $B(0;1)$.

  Fixemos $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 10.22 e o comentário que o segue,

  $$\frac{\partial f}{\partial z}(z,t) \text{ é contínua em } B(0;1) \times [0,n].$$

  Variando n vemos que

  $$\frac{\partial f}{\partial z}(z,t) \text{ é contínua em } B(0;1) \times [0,\infty).$$

- Derivabilidade de F. Ainda pelo Teorema 10.22 (ou pela regra de Leibniz complexa), temos que F_n é holomorfa e

  $$F_n'(z) = \int_0^n \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt.$$

  O teorema da convergência de Weierstrass (6.22) mostra que F' existe e

  $$F_n' \xrightarrow{\text{uniformemente}} F' \text{ nos compactos de } B(0;1).$$

- A derivada de F. Fixemos $\zeta \in B(0;1)$. Analogamente ao que foi feito acima, dada qualquer sequência de reais positivos (r_n) tal que $r_n \to \infty$, temos que

  $$\int_0^{r_n} \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta,t)dt \xrightarrow{n\to\infty} F'(\zeta).$$

  Isto mostra que

  $$\lim_{r\to+\infty} \int_0^r \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta,t)dt = F'(\zeta).$$

  Isto é,

  $$\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta,t)dt = F'(\zeta) \clubsuit$$

A proposição abaixo apresenta uma condição simples que, se satisfeita, garante que uma dada família de integrais a um parâmetro converge uniformemente.

10.24 Proposição. *Seja $f : B(0;1) \times [0,+\infty) \to \mathbb{C}$ contínua. Suponha que existe $M : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ satisfazendo*

$$|f(z,t)| \leq M(t) \text{ para todo } (z,t), \qquad e \qquad \int_0^\infty M(t)dt < \infty.$$

Então,

$$F(z) = \int_0^\infty f(z,t)dt$$

está bem definida e converge uniformemente em $B(0;1)$.

Prova.

- Boa definição. Fixemos $z \in B(0;1)$. Por hipótese, temos

$$\begin{cases} 0 \leq \mathrm{Re}(f)(z,t) + |f(z,t)| \leq 2|f(z,t)| \leq 2M(t) \\ \text{e} \\ 0 \leq \mathrm{Im}(f)(z,t) + |f(z,t)| \leq 2|f(z,t)| \leq 2M(t). \end{cases}$$

  Donde segue [cheque]

$$\int_0^\infty f(z,t)dt < \infty.$$

- Convergência uniforme. Seja $\epsilon > 0$. Devido à hipótese sobre $M(t)$, temos que existe $R > 0$ tal que para quaisquer $a \geq R$ e $b \geq R$ temos

$$\int_a^b M(t)dt \leq \epsilon.$$

  Logo,

$$\left|\int_a^b f(z,t)dt\right| \leq \int_a^b |f(z,t)|dt \leq \int_a^b M(t)dt \leq \epsilon \clubsuit$$

Portanto, se $f = f(z,t)$ satisfaz as hipóteses da proposição imediatamente acima e é holomorfa na primeira variável, então podemos aplicar o Teorema 10.23.

Comentários.

(1) Localidade. Os resultados acima são locais e usualmente aplicados na vizinhança de um valor fixo do parâmetro. Assim e por meio de uma trivial mudança de parâmetros, basta prová-los para o parâmetro em $B(0;1)$.

(2) Parâmetro em $(-\infty,+\infty)$. Vale um resultado análogo ao do Teorema 10.23, trocando $[0,\infty)$ por $(-\infty,+\infty)$. De fato, com tal troca e ajustando as hipóteses (de maneira óbvia) e então escrevendo

$$F(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(z,t)dt=\int_{-\infty}^{0} f(z,t)dt+\int_{0}^{\infty} f(z,t)dt,$$

pelo Teorema 10.23 segue imediatamente

$$F'(z)=\int_{-\infty}^{0} \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt+\int_{0}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt.$$

(3) Parâmetro em $[0,a)$. O caso para integral imprópria em $[0,a)$ é análogo ao caso para a integral imprópria em $[0,+\infty)$. De fato, ∞ como extremo de integração no enunciado do Teorema 10.23 é apenas um símbolo que indica a ocorrência de uma integral imprópria. Sendo assim, basta que no enunciado e na prova do Teorema 10.23 troquemos $[0,+\infty)$ por $[0,a)$ e o símbolo ∞ no papel de extremo de integração pelo símbolo a. [Cheque.]

(4) Parâmetro em (a,b). O caso para integral imprópria em (a,b) pode ser trivialmente reduzido ao caso imediatamente anterior (3). Para tal, consideremos um ponto $c\in(a,b)$. Com tal ponto auxiliar, escrevemos

$$F(z)=\int_{a}^{b} f(z,t)dt=\int_{a}^{c} f(z,t)dt+\int_{c}^{b} f(z,t)dt.$$

A seguir, por favor, utilize o comentário (3) e complete a argumentação.

(6) O teorema da convergência de Weierstrass, utilizado nesta seção é um alto preço a pagar (tanto quanto possível é melhor evitar "chamar um santo"). Para provas de resultados sobre derivação sob o sinal da integração que independem deste resultado (e da fórmula integral de Cauchy, do teorema de Morera e do teorema de Fubini) vide

`http://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-DERIVAR-SOB-INTEGRAL-COMPLEXA.pdf`.

10.8 - Apêndice 1 - O Teorema da Convergência de Weierstrass (revisitado)

10.25 Teorema. *Seja* (f_n) *uma sequência em* $\mathcal{H}(\Omega)$ *tal que*

$$f_n \longrightarrow f \quad \textit{uniformemente em compactos.}$$

Então, f *é holomorfa em* Ω *e*

$$f_n' \longrightarrow f' \quad \textit{uniformemente em compactos.}$$

Prova.

A convergência uniforme garante que f é contínua.

Fixemos um disco não degenerado $D(a;2r) \subset \Omega$. Seja

$$\gamma(\theta) = a + re^{i\theta}, \text{ onde } \theta \in [0,2\pi] \quad \text{(sentido anti-horário)}.$$

Seja $\zeta \in B(a;2r)$. Pela fórmula integral de Cauchy (10.11) e pela convergência uniforme em compactos segue [cheque]

$$f_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(z)}{z-\zeta}dz \longrightarrow f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-\zeta}dz.$$

Pela regra de Leibniz complexa (Teorema 10.4) aplicada a f segue [cheque]

$$f'(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{(\gamma(t)-\zeta)^2}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-\zeta)^2}dz, \quad \text{onde } \zeta \in B(a;2r).$$

Obviamente, valem fórmula análogas para f_n'.

Seja ζ arbitrário em $D(a;r)$. Então, pela estimativa M-L temos

$$2\pi|f_n'(\zeta) - f'(\zeta)| = \left|\int_\gamma \frac{f_n(z)-f(z)}{z-\zeta}dz\right| \leq \frac{2\pi r}{r} \sup_{z \in \partial D(a;r)} \{|f_n(z) - f(z)|\}.$$

Logo, $f_n' \to f'$ uniformemente em $D(a;r)$, para todo $D(a;2r) \subset \Omega$.

Portanto, $f_n' \to f'$ uniformemente em compactos [cheque]♣

10.9 - Apêndice 2 - Derivação sob o Sinal de Integração (Parâmetro Real)

10.26 Lema. *Seja $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções de classe C^1, com*

$$\begin{cases} f_n \text{ convergindo uniformemente a } f \\ e \\ f_n' \text{ convergindo uniformemente a } g. \end{cases}$$

Então, f é de classe C^1 e

$$f' = g.$$

Prova.

Cada f_n' é contínua e $f_n' \to g$ uniformemente. Logo, g é contínua.

Fixemos $x \in [0,1]$. Pelo já observado segue

$$\int_0^x f_n'(t)dt \xrightarrow{n\to+\infty} \int_0^x g(t)dt.$$

Assim,

$$f_n(x) - f_n(0) \xrightarrow{n\to+\infty} \int_0^x g(t)dt.$$

Por outro lado, devido à hipótese temos

$$f_n(x) - f_n(0) \xrightarrow{n\to+\infty} f(x) - f(0).$$

Donde segue,

$$f(x) - f(0) = \int_0^x g(t)dt \quad \text{para todo } x \in (-1,1).$$

Pelo teorema fundamental do cálculo segue então que f é derivável e

$$f'(x) = g(x) \clubsuit$$

10.27 Teorema (para integrais próprias e parâmetro real). *Consideremos uma função* $f : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}$*, com* $f(x,y)$ *e* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *contínuas. Então,*

$$F(x) = \int_0^1 f(x,y)dy$$

é contínua em $[a,b]$*. Ainda mais,* F *é de classe* C^1 *e*

(Regra de Leibniz) $$F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy.$$

Prova.

Sejam $n \in \mathbb{N}^*$ e $\epsilon > 0$. Consideremos a soma de Riemann

$$S_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f\left(x, \frac{j}{n}\right)\frac{1}{n}, \quad \text{onde } x \in [a,b].$$

Logo, S_n é contínua. Pela continuidade uniforme de f existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x,s) - f(x,t)| < \epsilon \text{ se } |s-t| < \delta.$$

Suponhamos $1/n < \delta$. Para todo x em $[a,b]$ temos

$$|S_n(x) - F(x)| = \left|\sum_{j=1}^{n} \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} f\left(x, \frac{j}{n}\right) dy - \sum_{j=1}^{n} \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} f(x,y)dy\right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} \epsilon dy = \epsilon.$$

Portanto $S_n \to F$ uniformemente.

Analogamente [basta trocar f por $\partial f/\partial x$],

$$S_n'(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x}\left(x, \frac{j}{n}\right)\frac{1}{n} \xrightarrow{\text{uniformemente}} G(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy.$$

Claramente cada S_n' é contínua.

Pelo Lema 10.26 segue que F é de classe C^1 e

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy \clubsuit$$

10.28 Corolário (para integrais impróprias e parâmetro real). *Consideremos* $f = f(x,y) : (-1,1)\times[0,\infty) \to \mathbb{R}$ *contínua e tal que* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *existe em todo ponto e é também contínua. Suponha que existe* $M : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *tal que*

$$|f(x,y)| \le M(y), \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \le M(y) \quad e \quad \int_0^\infty M(y)dy < \infty.$$

Então,

$$F(x) = \int_0^\infty f(x,y)dy$$

é de classe C^1 *em* $(-1,1)$ *e satisfaz*

$$F'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy.$$

Prova.

Pelas hipóteses, fixado x, as funções $y \mapsto f(x,y)$ e $y \mapsto (\partial f/\partial x)(x,y)$ são absolutamente integráveis em $[0,\infty)$. Logo, estão bem definidas as funções

$$F(x) = \int_0^\infty f(x,y)dy \quad \text{e} \quad G(x) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy.$$

Dados $n \in \mathbb{N}$ e $x \in (-1,1)$, sejam

$$F_n(x) = \int_0^n f(x,y)dy \quad \text{e} \quad G_n(x) = \int_0^n \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy.$$

Pela regra de Leibnitz (Teorema 10.27) as funções F_n e G_n são contínuas e

$$F_n' = G_n.$$

Por outro lado, para todo $x \in (-1,1)$ temos

$$|F_n(x)-F(x)| \le \int_n^\infty M(t)dt \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \ \text{ e } \ |G_n(x)-G(x)| \le \int_n^\infty M(t)dt \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Donde segue que

$$F_n \xrightarrow{\text{uniformemente}} F \quad \text{e} \quad F_n' = G_n \xrightarrow{\text{uniformemente}} G.$$

Logo, pelo Lema 10.26 concluímos que F é de classe C^1 e

$$F'(x) = G(x) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy \clubsuit$$

Comentários.

(1) Funções a valores complexos. O Lema 10.26, o Teorema 10.27 e o Corolário 10.28 estão enunciados para funções a valores reais. Entretanto, considerando as parte real e imaginária

$$\mathrm{Re}(f) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(f)$$

de uma função f a valores complexos, vemos trivialmente que estes três resultados são trivialmente estendidos a uma tal função f.

(2) Localidade/compacidade. O Lema 10.26 e o Teorema 10.27 são resultados locais e em seus enunciados os parâmetros estão variando em intervalos compactos e específicos. É trivial ver que resultados e demonstrações semelhantes (com evidentes adaptações) também valem para o parâmetro variando em um intervalo aberto qualquer. Vale um resultado análogo ao Corolário 10.28, com o parâmetro variando em um intervalo arbitrário.

(3) A função $M(y)$. No Corolário 10.28, nada perdemos supondo que uma mesma função $M(y)$ satisfaz $|f(x,y)| \leq M(y)$ e $|(\partial f/\partial x)(x,y)| \leq M(y)$. Pois, se houver uma função $M_1(y)$ para uma desigualdade e uma outra função $M_2(y)$ para a outra desigualdade, utilizamos $M(y) = M_1(y) + M_2(y)$.

(4) A majoração. No Corolário 10.28, basta verificarmos as desigualdades

$$|f(x,y)| \leq M(y) \quad \text{e} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq M(y)$$

para y grande o suficiente. [Cheque.]

(5) Parâmetro em outros intervalos. Vale um resultado análogo ao do Corolário 10.28, trocando $[0,\infty)$ por qualquer um dos intervalos abaixo:

$$(-\infty,+\infty), \qquad (-\infty,0], \qquad (a,b], \qquad [a,b), \qquad \text{e} \qquad (a,b).$$

10.10 - Apêndice 3 - Representação de f via Re(f) [Fórmula de Schwarz]

10.29 Teorema (Fórmula de Schwarz). *Seja $f = u+iv$ holomorfa em $B(0;\rho)$, com $\rho > 0$ e $u = Re(f)$. Seja r tal que $0 < r < \rho$. Então, dado $w \in B(0;r)$ temos*

$$f(w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\frac{re^{i\theta}+w}{re^{i\theta}-w}d\theta \, + \, iv(0).$$

Prova.

Escrevendo

$$f(z) = \sum a_n z^n, \text{ onde } |z| < \rho,$$

obtemos

$$u(z) = \frac{1}{2}\sum(a_n z^n + \overline{a_n z^n}).$$

Dado $z = re^{i\theta}$ na circunferência de centro na origem e de raio r, temos

$$u(re^{i\theta}) = \mathrm{Re}(a_0) + \frac{1}{2}\sum_{m\geq 1} r^m(a_m e^{im\theta} + \overline{a_m}e^{-im\theta}).$$

Multiplicando tal identidade por $e^{-in\theta}$, para $n \geq 1$, e integrando obtemos

$$\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta = r^n a_n \pi.$$

Obtivemos fórmulas para os coeficientes que dependem apenas de $u = \mathrm{Re}f$:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\frac{1}{(re^{i\theta})^n}d\theta, \quad \text{se } n \geq 1.$$

Observemos que, pela fórmula do valor médio de Gauss,

$$a_0 = f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Re}(a_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta.$$

Dado então w em $B(0;r)$ temos (pelo Teste-M de Weierstrass, pois $\frac{|w|}{r} < 1$)

$$\begin{aligned}
f(w) &= a_0 + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\left(\frac{w}{re^{i\theta}}\right)^n d\theta = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\left[1 + 2\sum_{n\geq 1}\left(\frac{w}{re^{i\theta}}\right)^n\right]d\theta \, + \, iv(0) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\left[1 + 2\left(\frac{1}{1-\frac{w}{re^{i\theta}}} - 1\right)\right]d\theta \, + \, iv(0) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\left(\frac{2re^{i\theta}}{re^{i\theta}-w} - 1\right)d\theta \, + \, iv(0) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\frac{re^{i\theta}+w}{re^{i\theta}-w}d\theta \, + \, iv(0) \, \clubsuit
\end{aligned}$$