PROVA SUBSTITUTIVA (P1) DE FUNÇÕES ANALÍTICAS - IMEUSP

30 de junho, 2015

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	

Nome : ____

N$^{\underline{o}}$USP : ______________________________

Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Evite usar resultados não provados nos capítulos de 1 a 6 (notas do curso).
Evite, em particular, a função exponencial complexa e teoria da integração.
As funções nesta prova são **analíticas ou inteiras**, ambas no sentido de Weierstrass.
Justifique todas as passagens, com uma redação clara e não carregada em simbologia.
Escolha 5 questões.
BOA SORTE!

1. (a) Enuncie o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA).

   (b) Prove o TFA elementarmente (isto é, evite a função exponencial e as teorias de séries e integração).

2. (a) Enuncie a Desigualdade de Gutzmer-Parseval para séries de potências.
   (b) Enuncie e prove o Princípio do Módulo Máximo para séries de potências.
   (c) Defina função inteira no sentido de Weierstrass . Enuncie e prove o Teorema de Liouville para uma função inteira no sentido de Weierstrass.

3. (a) Defina famílias somáveis de números reais e maiores ou igual a zero. Defina famílias somáveis de números reais. Defina famílias somáveis de números complexos.

   (b) Enuncie e prove a lei associativa para uma família de números reais maiores ou iguais a zero.

4. (a) Defina função analítica (no sentido de Weierstrass).

   (b) Enuncie o Princípio dos Zeros Isolados (PZI).

   (c) Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analítica, com Ω um aberto conexo em $\mathbb{C}$. Suponha $f'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$. Mostre que

$$f \text{ é constante.}$$

5. Suponha que ρ, com $0 < \rho < \infty$, é o raio de convergência da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

e que em um ponto $w \in \partial B(0;\rho)$ a série de potências converge absolutamente. Mostre então que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ \text{ converge uniforme e absolutamente em } \ D(0;\rho).$$

6. Sejam z e w números complexos arbitrários. Prove as fórmulas

(a) $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z$

(b) $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$.

(c) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.