# $2^{\underline{a}}$ PROVA DE FUNÇÕES ANALÍTICAS- IMEUSP - MAT 225

**28 de maio, 2015**

| Q | N |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| E1 | |
| E2 | |
| E3 | |
| Total | |

Nome : ____________________*Gabarito(parcial)*____________________
N$^{\underline{o}}$USP : ________________________________
Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Evite utilizar teoria da integração complexa.
As funções nesta prova são analíticas ou inteiras, ambas no sentido de Weierstrass.
Justifique todas as passagens, com uma redação clara.
Escolha 5 (cinco questões).
BOA SORTE!

1. Identifiquemos o espaço vetorial das matrizes $2 \times 2$ de números reais, $M_2(\mathbb{R})$, com o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$. Municiemos $M_2(\mathbb{R})$ com a norma induzida pela norma usual de $\mathbb{R}^4$. Isto é, dada uma matriz $A = (a_{jk})$ em $M_2(\mathbb{R})$, a norma de $A$ é dada por $|A| = \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2}$. Seja $I$ a matriz identidade em $M_2(\mathbb{R})$. Ainda mais, consideremos em $M_2(\mathbb{R})$ o usual produto matricial.

   Fixemos um número real $\theta$. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Demonstre a convergência, em $M_2(\mathbb{R})$, da série
$$\exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots.$$

   (b) Compute $\exp(A)$. Isto é, encontre uma fórmula fechada para $\exp(A)$.

   **Solução.**
   Definamos
$$\mathbb{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : \ a \in \mathbb{R} \text{ e } b \in \mathbb{R} \right\}.$$

   A aplicação $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ satisfaz
$$\Phi(z+w) = \Phi(z) + \Phi(w), \ \ \Phi(zw) = \Phi(z)\Phi(w) \ \text{ e } \ \Phi(\lambda z) = \lambda\Phi(z),$$

   quaisquer que sejam os complexos $z$ e $w$ e o real $\lambda$. Isto é, $\Phi$ é um isomorfismo de corpos e também um isomorfismo entre espaços vetoriais reais. Ainda,
$$|\Phi(z)| = \sqrt{2}|z|.$$

Logo, $\Phi$ é um múltiplo de uma bijeção isométrica (logo, bicontínua). Então,

$$\begin{aligned}\Phi(e^{i\theta}) &= \Phi\left(\sum \frac{(i\theta)^n}{n!}\right)\\ &= \sum \frac{\Phi(i\theta)^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}^n .\end{aligned}$$

Logo,

$$\exp\left[\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}\right] = \Phi(\cos\theta + i\sin\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \clubsuit$$

2. (a) Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ uma curva contínua e fechada e $\alpha \notin \text{Imagem}(\gamma)$. Defina o índice de $\gamma$ em relação ao ponto $\alpha$, denotado por $\text{Ind}(\gamma; \alpha)$.

(b) Enuncie as quatro propriedades I1, I2, I3 e I4 do índice definido em (a).

Sejam $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}^*$ contínua e fechada e $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Prove as propriedades abaixo.

(c) $\text{Ind}\left(\frac{1}{\gamma}; 0\right) = -\text{Ind}(\gamma; 0)$.

(d) $\text{Ind}\left(\frac{1}{\gamma}; \alpha\right) = \text{Ind}\left(\gamma; \frac{1}{\alpha}\right) - \text{Ind}(\gamma; 0)$, se $\alpha$ e $\frac{1}{\alpha}$ não pertencem a $\text{Imagem}(\gamma)$.

3. (A) Defina o interior, $I(\gamma)$, de uma curva contínua e fechada

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$$

e o número de zeros de uma função analítica no interior de $\gamma$. Enuncie o Teorema de Rouché.

(B) Seja

$$p(z) = z^5 + 11z + 9, \text{ onde } z \in \mathbb{C}.$$

Determine o número de zeros de $p = p(z)$ em cada um dos domínios abaixo.

(1) $\left\{z : \frac{3}{4} < |z| < 1\right\}$ (2) $\{z : 2 < |z| < 3\}$.

4. (a) Defina produto cruzado.

No que segue, considere $z_1, z_2, z_3$ e $z_4$ números distintos em $\mathbb{C}$.

(b) Explicite (e demonstre) uma fórmula para o produto cruzado

$$[z_1, z_2, z_3, z_4].$$

(c) Prove que $z_1, z_2, z_3$ e $z_4$ pertencem a uma mesma circunferência ou a uma mesma reta se e somente se seu produto cruzado é um número real.

5. Defina a função exponencial complexa $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

   Esboce a imagem $\exp(\Omega)$, para a faixa horizontal

   (a) $\Omega = \{z : \mathrm{Re}(z) < 0 \text{ e } |\mathrm{Im}(z)| < \pi\}$.

   Esboce a imagem $g(O)$ para a faixa

   (b) $O = \{z : |\mathrm{Im}(z)| < \pi/2\}$ e a função

$$g(z) = \frac{e^z - 1}{e^z + 1}.$$

6. Suponha que $f$ é limitada e analítica em um aberto contendo

$$\{z : \mathrm{Im}(z) \geq 0\} \;\text{ e que }\; f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}.$$

Mostre que $f$ é constante.

7. (a) Enuncie a propriedade associativa para uma família $(p_j)_J$ de números reais positivos ou nulos.

   (b) Prove a propriedade enunciada em (a).

8. Seja $f(z)$ analítica na bola $B(0;1)$, com $f(0) = 0$. Prove que a série de funções

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(z^n) = f(z) + f(z^2) + f(z^3) + \cdots$$

é analítica em $B(0;1)$.