$1^{\underline{a}}$ PROVA DE FUNÇÕES ANALÍTICAS- IMEUSP - MAT 225

23 de abril, 2015

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
Total	

Nome : ________________*GABARITO(parcial)*________________
$N^{\underline{o}}$USP : ________________________________
Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Evite usar resultados não provados nos capítulos de 1 a 6 (notas do curso).
Evite, em particular, a função exponencial complexa e teoria da integração.
As funções nesta prova são **analíticas ou inteiras**, ambas no sentido de Weierstrass.
Justifique todas as passagens, com uma redação clara e não carregada em simbologia.
Escolha 5 (cinco questões).
BOA SORTE!

1. (a) Defina famílias somáveis em $\mathbb{R}$ e defina famílias somáveis em $\mathbb{C}$.

   (b) Sejam $(z_j)_J$ e $(w_k)_K$ duas famílias somáveis complexas. Mostre que família $(z_j w_k)_{J\times K}$ é somável e

$$\sum_{J\times K} z_j w_k = \left(\sum_J z_j\right)\left(\sum_K w_k\right).$$

   (c) Seja $(z_j)_J$ uma família somável complexa. Mostre que $(\overline{z_j})_J$ é somável e

$$\overline{\sum_J z_j} = \sum_J \overline{z_j}.$$

Solução.

(a) Vide notas de aula.

(b) Temos $\sum_{J\times K} |z_j|\,|w_k| \leq \left(\sum |z_j|\right)\left(\sum |w_k|\right)$. Logo, a família $(z_j w_k)_{J\times K}$ é somável. Pela propriedade associativa segue

$$\sum_{J\times K} z_j w_k = \sum_{j\in J}\sum_K z_j w_k = \sum_{j\in J}\left(z_j \sum_K w_k\right) = \left(\sum_K w_k\right)\left(\sum_J z_j\right).$$

(c) Pela definição da soma da família (z_j) e por linearidade, segue

$$\overline{\sum z_j} = \sum \mathrm{Re}(z_j) - i\sum \mathrm{Im}(z_j) = \sum[\mathrm{Re}(z_j) - i\mathrm{Im}(z_j)] = \sum \overline{z_j}\clubsuit$$

2. (a) Enuncie o princípio do módulo mínimo para polinômios.
   (b) Demonstre tal princípio.

3. (a) Defina função analítica (no sentido clássico, de Weierstrass).
   Enuncie o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA).
   Enuncie o Teorema de Liouville para funções analíticas.
   (b) Demonstre o TFA utilizando o Teorema de Liouville para funções analíticas.

4. (a) Enuncie a desigualdade de Gutzmer-Parseval para séries de potências.

   Defina função inteira (no sentido de Weierstrass).

   (b) Considere uma função inteira (no sentido de Weierstrass) f. Sejam m em $\mathbb{N}$ e duas constantes $A > 0$ e $B > 0$ tais que

$$|f(z)| \leq A + B|z|^m, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

   Mostre que $f = f(z)$ é um polinômio de grau menor ou igual a m.

5. Defina automorfismo analítico.

   Fixemos um ponto $a \in B(0;1)$.

   (a) Mostre que, a aplicação
   $$\phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z},$$
   satisfaz $\phi_a(B(0;1)) \subset B(0;1)$ e que
   $$\phi_a : B(0;1) \to B(0;1)$$
   é um automorfismo (analítico) cuja inversa é $\phi_{-a} : B(0;1) \to B(0;1)$.

   (b) A aplicação ϕ_a é analítica em um aberto contendo $D(0;1)$ e satisfaz
   $$\phi_a(S^1) = S^1.$$

   (c) Prove as fórmulas.
   $$\phi_a(a) = 0, \quad \phi_a(0) = -a, \quad \phi_a'(0) = 1 - |a|^2 \quad \text{e} \quad \phi_a'(a) = \frac{1}{1-|a|^2}.$$

6. Seja $(z_j)_J$ uma família somável e complexa. Mostre que

$$\left|\sum_J z_j\right| \leq \sum_J |z_j|.$$

Solução.

Temos

$$\left|\sum z_j\right|^2 = \left(\sum_{j\in J} z_j\right)\left(\overline{\sum_{k\in J} z_k}\right) = \left(\sum z_j\right)\left(\sum \overline{z_k}\right)$$
$$= \sum_{J\times J} z_j\overline{z_k}.$$

Logo, $\sum_{J\times J}(z_j\overline{z_k})$ é um número real e a parte imaginária desta soma é nula. Isto é,

$$\sum_{J\times J} \mathrm{Im}(z_j\overline{z_k}) = 0.$$

Donde segue

$$\begin{aligned}\left|\sum z_j\right|^2 &= \sum_{J\times J} \mathrm{Re}[z_j\overline{z_k}] \\ &\leq \sum_{J\times J} |\mathrm{Re}[z_j\overline{z_k}]| \\ &\leq \sum_{J\times J} |z_j|\,|z_k| \\ &= \left(\sum |z_j|\right)\left(\sum |z_k|\right) \\ &= \left(\sum |z_j|\right)^2 \clubsuit\end{aligned}$$

7. (a) Expresse

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^3}, \text{ onde } |z| < 1,$$

como uma série de potências na forma

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5 + \cdots.$$

(b) Desenvolva a função

$$f(z) = \frac{1}{1 - z - 2z^2}$$

em uma série de potências centrada na origem e ache o raio de convergência.

8. Seja $f : B(0; 1) \to V$ analítica. Suponha que f é uma função bijetora.

   (a) Justifique que V é um conjunto aberto.

   (b) Mostre que então a função inversa
   $$\varphi = f^{-1} : V \to B(0; 1)$$
   é contínua.

   (c) Mostre que se f' não se anula em nenhum ponto, então φ é complexa-derivável (isto é, holomorfa) em todo ponto do aberto V.