MAT 225 - Funções Analíticas - IMEUSP - Semestre 1 de 2015

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Lista 9 de Exercícios

Faça os exercícios abaixo com uma redação clara e não sobrecarregada em simbologia.

1. Compute $\int_\gamma f(z)\,dz$ onde f e γ são dados.

   (a) $f(z) = z\overline{z}$ e $\gamma(t) = e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$.

   (b) $f(z) = \dfrac{z+1}{z}$ e $\gamma(t) = 3e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$.

   (c) $f(z) = \dfrac{z+1}{z}$ e $\gamma(t) = 5i + e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$.

   (d) $f(z) = \dfrac{1}{z^2-2}$ e $\gamma(t) = 2 + e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$.

   (e) $f(z) = \dfrac{1}{z^2-2}$ e $\gamma(t) = 2e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$.

   (f) $f(z) = \pi e^{\pi \overline{z}}$ e γ é o quadrado de vértices $0, 1, 1+i$ e i, positivamente orientado.

   (g) $f(z) = \dfrac{1}{z - z_0}$ e $\gamma(t) = z_0 + re^{it},\ 0 \le t \le 2\pi, r > 0$.

   (h) $f(z) = \dfrac{1}{(z-z_0)^n}$ e $\gamma(t) = z_0 + re^{it}, 0 \le t \le 2\pi, r > 0, n \ge 2$.

   (i) $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2}$ e $\gamma(t) = e^{it}, 0 \le t \le 2\pi$.

   (j) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^4}$ e $\gamma(t) = e^{it}, 0 \le t \le 2\pi$.

   (k) $f(z) = \dfrac{\log z}{z^n}$ e $\gamma(t) = 1 + \dfrac{1}{4}e^{it}, 0 \le t \le 2\pi$.

   (l) $f(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{z^n}$ e $\gamma(t) = e^{it}, 0 \le t \le 2\pi, n \ge 1$.

   (m) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ e $\gamma(t) = 2e^{it}, 0 \le t \le 2\pi$.

2. Decomponha em frações parciais as seguintes funções.

   $(a)\ \dfrac{z^2+1}{z(z^2-1)} \qquad (b)\ \dfrac{1}{(z^2+1)^2} \qquad (c)\ \dfrac{z^3+1}{z^2-1} \qquad (d)\ \dfrac{z^9+1}{z^6-1}$

3. Compute as integrais

   $(a)\ \displaystyle\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{1}{z^2-3z+2}dz. \qquad (b)\ \displaystyle\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{3z^2-6z+2}{z^3-3z^2+2z}dz.$

   Sugestão. Desenvolva os integrandos pelo método de frações parciais.

4. (a) Ache os termos até ordem 7 da série de potências de $1/\cos z$ em torno de $z=0$.
   (b) Ache os termos até ordem 5 da série de potências de $z/\sin z$ em torno de $z=0$.
   (c) Desenvolva $e^z/(1+z)$ em série de potências centrada em $z=0$.

5. (a) Ache o desenvolvimento de Laurent de

$$f(z)=\frac{1}{z^2+1} \quad \text{em} \quad \Omega=\{z:0<|z-i|<2\}.$$

   (b) Calcule

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}, \quad \text{onde } \gamma(t)=2e^{it},\ t\in[0,2\pi].$$

6. Desenvolva

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$$

em série de Laurent para

$$(a)\ 1<|z|<3 \qquad (b)\ |z|>3 \qquad (c)\ 0<|z+1|<2.$$

7. Calcule

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}$ [esta "perturbou" Leibnitz] $\qquad (b)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^6}.$

(c) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}dx$ [exemplo importante] $\qquad (d)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx.$

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}.$

8. Calcule

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{a^2+x^2}\,dx,\ a>0.$ $\qquad (b)$ $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^4+4a^4}\,dx,\ a>0.$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x-1}\,dx.$ $\qquad (d)$ $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx.$

9. Determine e classifique as singularidades da função

$$f(z)=\frac{1}{z(e^z-1)}.$$

Mostre que se $0<|z|<2\pi$, então a função tem o desenvolvimento de Laurent

$$\frac{1}{z^2}-\frac{1}{2z}+a_0+a_2z^2+a_3z^3+\cdots+a_nz^n+\cdots$$

e determine então os valores a_0 e a_2.

10* Seja $z = x + iy$. Consideremos as funções trigonométricas hiperbólicas

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

(a) Expresse $\cosh z$ e $\sinh z$ em termos de $\cos(iz)$ e $\sin(iz)$.

(b) Analogamente às funções trigonométricas usuais, derive fórmulas aditivas para

$$\cosh(2z) \quad \text{e} \quad \sinh(2z).$$

(c) Mostre que

$$(c1) \quad |\cos z|^2 = \sinh^2 y + \cos^2 x = \cosh^2 y - \sin^2 x = \frac{\cosh 2y + \cos 2x}{2}.$$

$$(c2) \quad |\sin z|^2 = \sinh^2 y + \sin^2 x = \cosh^2 y - \cos^2 x = \frac{\cosh 2y - \cos 2x}{2}.$$

11. Mostre que

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty.$$

12. Utilizando um contorno de formato "buraco de fechadura" (esboce o contorno em cada caso) e um ramo da função logaritmo $\log(z)$, mostre que

$$(a) \quad \int_0^\infty \frac{x^a}{(1+x)^2} dx = \frac{\pi a}{\sin(\pi a)}, \quad -1 < a < 1.$$

$$(b) \quad \int_0^\infty \frac{x^{-a}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}, \quad 0 < a < 1.$$

13. As únicas singularidades de uma função holomorfa f ocorrem no polo simples $z = -1$ e no polo duplo $z = 2$, com resíduos 1 e 2 respectivamente.

Sabendo ainda que

$$f(0) = \frac{7}{4} \quad \text{e} \quad f(1) = \frac{5}{2},$$

determine a função f e desenvolva-a em série de Laurent na coroa

$$1 < |z| < 2.$$

14. Sejam ϕ e ψ funções holomorfas em volta de $z = a$, onde $\phi(a) \neq 0$ e a é raíz dupla de $\psi(z) = 0$. Prove que o resíduo de

$$\frac{\phi(z)}{\psi(z)}$$

no ponto $z = a$ é

$$\frac{6\phi'(a)\psi''(a) - 2\phi(a)\psi'''(a)}{3[\psi''(a)]^2}.$$

15. Expanda as seguintes funções em série de potências em torno de $z = \infty$.

$$(a)\ \frac{1}{z^2+1} \qquad (b)\ \frac{z^2}{z^3-1} \qquad (c)\ e^{1/z^2} \qquad (d)\ z\sinh(1/z).$$

16. Seja f meromorfa na esfera complexa e satisfazendo as condições

   (a) $f(0) = 0$, $f(-1) = 2$ e $f(3) = 3$.

   (b) f tem um polo simples em $z = 1$ com resíduo 1.

   (c) f tem um polo triplo em $z = 2$ com resíduo 2.

   Determine f e calcule seu desenvolvimento de Laurent na coroa

$$\{z : 1 < |z| < 2\}.$$

17. (a) Determine a forma geral de uma função analítica em $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ que tenha um polo de ordem n em $z = 0$ e um polo de ordem m no infinito.

   (b) Determine os resíduos da função

$$f(z) = \frac{z+1}{(z-2)^2}\cos\left(\frac{2\pi z - 2}{2z}\right)$$

   nos pontos $z = 2$, no ponto ∞ e em $z = 0$.

18. Encontre as singularidades na esfera de Riemann $S^2 \equiv \mathbb{C}_\infty$ e classifique-as.

$$(a)\ \frac{e^z}{1+z^2} \qquad (b)\ \frac{z^2+1}{e^z} \qquad (c)\ \frac{e^z}{z(1-e^{-z})} \qquad (d)\ \sin\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \qquad (e)\ \frac{z}{e^{\frac{1}{z}}-1}.$$

19. Explicite os possíveis desenvolvimentos em séries de Laurent do tipo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a_n}{z^n} \text{ e para a função } f(z) = \frac{1}{9-z^2} + \frac{1}{5-z}.$$

   Determine e esboce as respectivas regiões de convergência.

20. Expresse o desenvolvimento em série de McLaurin (a série de Taylor na origem) das duas funções abaixo, com a determinação que toma o valor 1 na origem $z = 0$.

   (a) $f(z) = (1+z)^{1/2}$.

   (b) $f(z) = (1+z)^{3/2}$.

21. Seja $c > 0$. Prove que

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{c-ir}^{c+ir} \frac{a^z}{z^2}\,dz = \begin{cases} \log a, & \text{se } a > 1, \\ 0, & \text{se } 0 < a < 1, \end{cases}$$

   onde $a^z = e^{z\log a}$ para um arbitrário $z \in \mathbb{C}$ e com $\log a \in \mathbb{R}$.

22. Calcule as integrais

$$(a)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx, \text{ com } a>0 \text{ e } b>0.$$

$$(b)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+4x+5}dx.$$

$$(c)\quad \int_{0}^{2\pi} \frac{dt}{\alpha+\beta\sin t}, \quad \text{onde } \alpha>|\beta|, \text{ com } \alpha \text{ e } \beta \text{ ambos em } \mathbb{R}.$$

$$(d)\quad \int_{\Gamma} \frac{e^z}{\cosh z}dz, \quad \text{onde} \quad \Gamma(\theta)=5e^{i\theta} \text{ e } \theta\in[0,2\pi].$$

23. Desenvolva em série de Laurent, indicando o domínio de convergência:

   (a) $(\sin z)\left(\sin \frac{1}{z}\right)$ numa vizinhança da origem.

   (b) $\frac{1}{z(1-z)}$ numa vizinhança de $z=1$.

24. (a) Ache uma fórmula fechada para a função, definida por uma série de potências,

$$f(w)=\sum_{p=1}^{+\infty} pw^p, \text{ onde } |w|<1.$$

   (b) Mostre que se $|z|<1$, então

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nz^n}{1-z^n}=\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)^2}.$$

   Sugestões. Expresse uma série como série dupla e justifique a troca de ordem no somatório (passe para famílias somáveis).

25. Mostre que se $z\in\mathbb{C}$ é tal que $|z|<1$, então

$$\frac{z}{1-z^2}+\frac{z^2}{1-z^4}+\cdots+\frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}+\cdots=\frac{z}{1-z}.$$

26. Seja $f(z)$ analítica em $B(0;1)$ com $f'(z)$ limitada em $B(0;1)$. Mostre que f pode ser estendida continuamente a $D(0;1)$.

27. Utilize a fórmula para edolcc's dada na Lista 8 e resolva as equações abaixo.

   (a) $x'''-4x''+5x'-2x=t^2e^t$.

   (b) $x'''-4x''+6x'-4x=t^3\ e^{2t}$.

   (c) $x''-2x'+2x=(2t^2+t)e^t$.

   (d) $x''-4x'+5x=e^{2t}\cos t$.

28. Seja λ em $\mathbb{C}$. Mostre que o espaço (vetorial) das soluções de

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda I\right)^m x(t) = 0$$

é o conjunto das combinações lineares com coeficientes complexas das funções

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \ldots, t^{m-1}e^{\lambda t}.$$

Dica. Utilize a fórmula para edolcc's dada na lista 8.

29. Considere o operador diferencial linear

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) = a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 I,$$

na variável real t, coeficientes reais a_j para $0 \le j \le n$, e com I o operador identidade sobre o espaço $C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ [o espaço das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ que são de classe C^∞]. Suponha $a_n \neq 0$ e $n \geq 1$. Considere o polinômio característico de tal operador,

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0, \text{ onde } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Seja γ uma raiz complexa de multiplicidade m de $p(\lambda) = 0$. Mostre que as m funções

$$x_1(t) = e^{\gamma t},\ x_2(t) = te^{\gamma t}, \ldots,\ x_m(t) = t^{m-1}e^{\gamma t}$$

são soluções da edo homogênea

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_3 x''' + a_2 x'' + a_1 x' + a_0 x = 0.$$

Dicas. Use o Exercício 31 ou, diretamente, a fórmula para edolcc's na lista 8.

30. **Transformada de Fourier.** Mostre que

$$(a) \qquad e^{-\pi\xi^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x\xi} dx, \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}.$$

$$(b) \qquad e^{-\pi\xi^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{2\pi i x\xi} dx, \text{ para todo } \xi \in \mathbb{C}.$$

Obs. Por (b), a transformada de Fourier de $f(x) = e^{-\pi x^2}$ é

$$\hat{f}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}.$$

31. Integre $e^{-\frac{z^2}{2}}$ no bordo do retângulo de vértices $\pm R$ e $it \pm R$. Impondo $R \to \infty$, mostre

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-itx} dx = e^{-\frac{t^2}{2}}, \text{ onde } t \in \mathbb{R}.$$

Dica. Utilize o conhecido valor da integral para $t = 0$. [Este exercício mostra que $e^{-\frac{x^2}{2}}$ é uma autofunção da transformada de Fourier, associada ao autovalor 1.]

32. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt^2+2wt} dt = \sqrt{\frac{\pi}{z}}\, e^{\frac{w^2}{z}}, \text{ onde } w \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C} \text{ e } \mathrm{Re}(z) > 0,$$

utilizando o ramo principal da raiz quadrada.

Dica. Mostre que a integral é analítica em z e em w e a avalie para $z = x > 0$ e w real, por meio de uma mudança de variável e usando o conhecido valor $\sqrt{\pi}$ em $z = 1$ e $w = 0$.

==

===

Para o futuro

E1. **Fórmula para a Função Inversa**. Seja $f : \Omega \to O$ um bi-holomorfismo, denotado por $w = f(z)$, com inversa $f^{-1} : O \to \Omega$ denotada por $z = f^{-1}(w)$. Consideremos um disco compacto $D = D(a;r) \subset \Omega$, com $r > 0$, e a bola aberta $B = B(a;r)$. Mostre que a aplicação $f^{-1}\Big|_{f(B)} : f(B) \to B$ é dada pela fórmula

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta, \text{ onde } w \in f(B).$$

Sugestão. Exercícios sobre a Remoção de Singularidades de Riemann (Lista 8).

E2. **Um Teorema da Função Implícita Complexo.** Consideremos uma função

$$f = f(z,w) : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}.$$

Indiquemos $z = x + iy$, com x e y em $\mathbb{R}$. Indiquemos $w = u + iv$, com u e v em $\mathbb{R}$. Denotemos por $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ o campo vetorial associado a f e definido por

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = \big(f_1(x,y,u,v), f_2(x,y,u,v)\big), \\ \text{com} \\ f_1(x,y,u,v) = \mathrm{Re}(f)(z,w) \text{ e } f_2(x,y,u,v) = \mathrm{Im}(f)(z,w). \end{cases}$$

Suponha que o campo F pertence a $C^\infty(\mathbb{R}^4)$ e que f é holomorfa em cada variável. Consideremos um ponto (z_0, w_0) satisfazendo

$$f(z_0,w_0) = 0 \;\text{ e }\; \frac{\partial f}{\partial w}(z_0,w_0) \neq 0.$$

Mostre a afirmações a seguir.

(a) Existe uma bola não degenerada $B(z_0;r)$ e um aberto W contendo w_0 tais que: para todo ponto $z \in B(z_0;r)$, existe um único ponto $\varphi(z) \in W$ satisfazendo

$$f(z,\varphi(z)) = 0 \;\; [\text{logo, } \varphi(z_0) = w_0].$$

Dica. Utilize o Teorema da Função Implícita (real) para o campo $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ e as equações de Cauchy-Riemann. Vide Teorema 5.11.

(b) Mostre que $\varphi : B(z_0;r) \to W$ é holomorfa.

Dicas. O Teorema da Função Implícita (real) garante que o campo Φ, associado a φ, é de classe C^∞. Use o Teorema 5.11 e, talvez, o operador

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \;\; \text{[Lista 8]}.$$