MAT 225 - Funções Analíticas - IMEUSP - Semestre 1 de 2015

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Lista 7 de Exercícios

Os exercícios abaixo se referem a **funções analíticas ou a funções inteiras, ambas no sentido de Weierstrass**.

Prove suas afirmações, com uma redação clara e não sobrecarregada em simbologia.

1. Se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é analítica, então o campo associado $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é de classe C^∞.

2* Seja Ω um aberto não vazio e arbitrário em $\mathbb{C}$. Seja (f_n) uma sequência de funções analíticas em Ω que converge compactamente a uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Mostre que:

   (a) f é analítica em Ω.

   (b) a sequência $(f_n^{(k)})$ converge compactamente a $f^{(k)}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

3* Prove o teorema Fundamental da Álgebra como um corolário do teorema de Rouché.

4* **Teorema (Hurwitz)** Sejam f e f_n, para $n = 1, 2, \ldots$, analíticas e não constantes em um aberto e conexo Ω. Suponhamos que

$$f_n \text{ converge compactamente a } f.$$

Seja $\alpha \in \Omega$ e $r > 0$, com $D(\alpha; r) \subset \Omega$. Seja $\gamma(t) = \alpha + re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Suponhamos que f não se anula na imagem de γ. Então, para todo n grande o suficiente, f_n e f tem o mesmo número de zeros no interior de γ.

5* Determine todos os pares de funções inteiras f e g que satisfazem

$$f^2(z) + g^2(z) = 1, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Sugestão. Teorema 8.8 nas notas de aula.

6. (a) Mostre que existe um índice $N \in \mathbb{N}$ tal que cada polinômio

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

   tem um zero na bola $B(\pi; 1)$, para todo $n \geq N$.

   (b) Mostre que para cada $R > 0$, se n é suficientemente grande então

$$P_n(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} \text{ não tem zeros em } D(0; R).$$

7. Verifique as afirmações abaixo sobre os polinômios apresentados.

   (a) $p(z) = 2z^{10} + 4z^2 + 1$ e $q(z) = 2z^{10} - 4z^2 + 1$ tem exatamente dois zeros em $B(0;1)$.
   Sugestão. Mostre que $|4z^2| > |2z^{10} + 1|$ para todo $z \in S^1$.

   (b) $p(z) = z^5 + 13z^2 + 15$ tem

   $$\text{dois zeros na coroa } \{z : 1 < |z| < 2\} \text{ e três zeros na coroa } \left\{z : 2 < |z| < \frac{5}{2}\right\}.$$

8. Suponha que f é inteira e que $f(z)$ é real se e somente se z é real. Use o princípio do argumento para mostrar que f tem no máximo um zero.

9. Encontre o número de zeros de

   (a) $f_1(z) = 3e^z - z$, no disco $D(0;1)$.
   (b) $f_2(z) = \frac{1}{3}e^z - z$, no disco $D(0;1)$.
   (c) $f_3(z) = z^4 - 5z + 1$, na coroa $\{z : 1 \leq |z| \leq 2\}$.
   (d) $f_4(z) = z^6 - 5z^4 + 3z^2 - 1$, no disco $\{D(0;1)$.

10. Seja $p(z) = z^5 + 11z + 9$. Quantos zeros p tem em cada um dos domínios:

    (a) $\left\{z : \frac{3}{4} < |z| < 1\right\}$ (b) $\{z : 1 < |z| < 2\}$ (c) $\{z : 2 < |z| < 3\}$.

11. Mostre que na bola $B(0;1)$ existem k soluções da equação

    $$3z^k = e^z.$$

    Sugestão. Teorema de Rouché.

12. Encontre as transformações lineares fracionárias que mapeiam, ordenadamente,

    (a) $1, i, -1$ em $i, -1, 1$.
    (b) $i, -1, 1$ em $-1, -i, 1$.
    (c) $-1, -i, 1$ em $-1, 0, 1$.
    (d) $-1, 0, 1$ em $-1, i, 1$.

13. Encontre as transformações lineares fracionárias que mapeiam, ordenadamente,

    (a) $0, 1, \infty$ em $1, \infty, 0$.
    (b) $0, 1, \infty$ em $1, -1, i$.
    (c) $i, -1, 1$ em $1, 0, \infty$.
    (d) $0, 1, 2$ em $1, 0, \infty$.

14. Mostre que é possível definir uma determinação analítica e única de

$$\log\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \quad \text{em} \quad \mathbb{C}\smallsetminus\overline{B(0;1)},$$

se impormos que seu limite no infinito é zero.

15. Encontre a imagem dos conjuntos abaixo, pela transformação de Möbius

$$\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$

(a) A semi reta superior it, com $t \geq 0$.

(b) A circunferência de centro 1 e raio 1.

(c) A linha horizontal $i+t$, com $t \in \mathbb{R}$.

(d) A semi circunferência $|z| = 2$, com $\operatorname{Im}(z) \geq 0$.

(e) A semi reta vertical $\operatorname{Re}(z) = 1$ e $\operatorname{Im}(z) \geq 0$.

16. Encontre os pontos fixos das transformações de Möbius:

$(a)\ \varphi(z) = \dfrac{z-3}{z+1}$ $\qquad$ $(b)\ \varphi(z) = \dfrac{z-4}{z+2}$

$(c)\ \varphi(z) = \dfrac{z-i}{z+1}$ $\qquad$ $(d)\ \varphi(z) = \dfrac{2z-3}{z+1}$

17. Seja $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Consideremos a transformação de Möbius

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Mostre que temos $\varphi(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$ se e só se podemos escolher a, b, c e d em $\mathbb{R}$.

18* Sejam z_1 um ponto arbitrário em $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ e z_2, z_3 e z_4 pontos distintos em $\overline{\mathbb{C}}$. Definimos o **produto cruzado**

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] \quad \text{por} \quad T(z_1),$$

com T a única transformação de Möbius mapeando z_2, z_3, z_4 em $1, 0, \infty$, em ordem.

(a) Suponha que z_2, z_3 e z_4 são números distintos. Ache uma expressão para $T(z)$.

(b) Encontre expressões para $T(z)$, nos casos : $z_2 = \infty$, $z_3 = \infty$ e $z_4 = \infty$.

(c) Suponha z_1, z_2, z_3 e z_4 números distintos. Mostre que

$$T(z_1) = [z_1, z_2, z_3, z_4] \;=\; \frac{\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}}{\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}} = \frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}.$$

(d) Seja φ uma transformação de Möbius. Mostre que

$$[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4] = [z_1, z_2, z_3, z_4], \text{ onde } \zeta_j = \varphi(z_j) \text{ e } j = 1, 2, 3, 4.$$

Sugestão. Analise separadamente: translações, inversões e multiplicações.

19. Compute os produtos cruzados:

    (a) $[7+i, 1, 0, \infty]$.
    (b) $[2, 1-i, 1, 1+i]$.
    (c) $[0, 1, i, -1]$.
    (d) $[1-i, \infty, 1+i, 0]$.

20. Considere a transformação de Möbius

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{(logo, } ad-bc \neq 0\text{)}.$$

Encontre z_2, z_3 e z_4 [em termos de a, b, c e d] tais que

$$\varphi(z) = [z, z_2, z_3, z_4].$$

21* Sejam z_1, z_2, z_3 e z_4 distintos na esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

   (a) Prove que z_1, z_2, z_3 e z_4 pertencem a uma mesma circunferência ou a uma mesma reta se e somente se seu produto cruzado é um número real.
   (b) Suponha que z_1, z_2, z_3 e z_4 pertencem a uma mesma circunferência. Mostre que

$$|z_1 - z_3||z_2 - z_4| \;=\; |z_1 - z_2||z_3 - z_4| \;+\; |z_2 - z_3||z_4 - z_1|.$$

22* Seja Γ uma circunferência (generalizada) pelos pontos z_2, z_3 e z_4 em $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Dois pontos z e z^*, ambos em $\mathbb{C}_\infty$, são ditos **simétricos** com relação a Γ se

$$[z^*, z_2, z_3, z_4] = \overline{[z, z_2, z_3, z_4]}.$$

Mostre que a definição de simetria independe dos pontos escolhidos em Γ. Isto é, se w_2, w_3, w_4 são outros três pontos em Γ, então a equação destacada acima é satisfeita se e somente se temos

$$[z^*, w_2, w_3, w_4] = \overline{[z, w_2, w_3, w_4]}.$$