MAT 225 - Funções Analíticas - IMEUSP - Semestre 1 de 2015
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Lista 5 de Exercícios

Notação: Ω é um **aberto não vazio**. Os exercícios e resultados citados se referem a **funções analíticas ou a funções inteiras, ambas no sentido de Weierstrass**.

Resolva ao menos 15 dos exercícios (distribuídos em 6 grupos). Prove suas afirmações.

Os exercícios com * são "obrigatórios". Escolha exercícios de cada um dos 6 grupos.

Procure uma redação clara e não carregada em simbologia.

1* Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analítica, com Ω conexo, tal que $f' \equiv 0$. Então, f é constante.

2. Sejam f e g analíticas no conexo Ω. Se $fg \equiv 0$ então, ou $f \equiv 0$ ou $g \equiv 0$.

3* Quais são as funções analíticas $f : B(0;2) \to \mathbb{C}$ tais que

$$f\Big(\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{n^2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\,?$$

Existe uma função analítica $g : B(0;2) \to \mathbb{C}$ tal que

$$g\Big(\frac{1}{n}\Big) = g\Big(-\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{n^3}\,?$$

4. Suponha que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é analítica e que Ω é conexo. Mostre que
   (a) Se $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$, então f é constante.
   (b) Se $|f|$ é constante, então f é constante.

5. Seja Ω conexo e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analítica, com $\mathrm{Re}(f) = u$ e $\mathrm{Im}(f) = v$. Seja $\beta : \Omega \to \mathbb{R}$. Mostre que $u + i\beta$ é analítica se e só se $v - \beta$ é constante.

==

6. Encontre o módulo máximo e o módulo mínimo de $f(z) = z^2 - z$ em $D(0;1)$.

7. Sejam f e g analíticas numa vizinhança de $D(0;R)$ e com $|f(z)| = |g(z)|$ se $|z| = R$. Mostre que se f e g não se anulam em $B(0;R)$, então existe $\omega \in S^1$ tal que

$$f = \omega g.$$

8* Seja f analítica em $B(0;1)$, contínua em $D(0;1)$ e com $f(S^1) \subset S^1$. Mostre que

$$f\Big(B(0;1)\Big) = B(0;1).$$

9* A desigualdade de Gutzmer-Parseval implica o princípio do módulo máximo.

==

==

10* **Teorema de Liouville (para funções analíticas)**. Se f é analítica no plano e é limitada, então f é constante.
Dicas. (1) Princípio do Módulo máximo ; (2) Hurwitz + Liouville (para inteiras).

11* A desigualdade de Gutzmer-Parseval implica o teorema de Liouville (para inteiras).

12* Demonstre o TFA a partir do Teorema de Liouville para funções analíticas.

13. **(Teorema de Liouville Estendido)** Sejam f inteira, $m \in \mathbb{N}$, $A \geq 0$ e $B \geq 0$ com

$$|f(z)| \;\leq\; A + B|z|^m\,, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Mostre que f é um polinômio de grau menor ou igual a m.

Sugestão. Desigualdade de Gutzmer-Parseval.

14. Seja f inteira e não constante. Prove que $f(\mathbb{C})$ é denso em $\mathbb{C}$.

15. Sejam ω_1 e ω_2 números complexos linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$. Seja $f = f(z)$ uma função inteira que satisfaz

$$f(z+\omega_1) = f(z) = f(z+\omega_2), \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Mostre que f é constante.

16. Sejam f e g funções inteiras e satisfazendo $|f(z)| \leq |g(z)|$, para todo $z \in \mathbb{C}$.
Mostre que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $f = \lambda g$.
Sugestão. Princípio dos zeros isolados e teorema de Liouville.

17. Seja f uma função inteira. Mostre que:

   (a) f é constante se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{Re}(f)(z) \leq M$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

   (b) f é um polinômio com $\mathrm{grau}(f) \leq n$ se existem $M \geq 0$, $r > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(z)| \leq M|z|^n, \text{ para todo } z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z| > r.$$

==

18. Sejam Ω e O abertos conexos e não vazios do plano. Suponha que $f : O \to \mathbb{C}$ é analítica e que $g : \Omega \to O$ é analítica e não constante. Suponha ainda que $f(g(z)) = 0$ para todo $z \in \Omega$. Mostre que f é identicamente nula.

19* Seja $f : B(a;r) \to \mathbb{C}$ analítica, onde $r > 0$, com $f(z) \neq 0$ para todo $z \in B(a;r)$. Fixemos $n \in \mathbb{N}^*$. Mostre que existe $\delta > 0$ e $g : B(a;\delta) \to \mathbb{C}$ analítica e tal que

$$f(z) = [g(z)]^n, \text{ para todo } z \in B(a;\delta).$$

20* Seja f analítica e injetora, em um aberto. Mostre que f' não se anula.

==

==

21* Seja $a \in B(0;1)$. Mostre que, a aplicação

$$\phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z},$$

é um automorfismo (analítico) de $B(0;1)$, com inversa ϕ_{-a}. Ainda mais, a aplicação ϕ_a é analítica em um aberto contendo $D(0;1)$ e satisfaz $\phi_a(S^1) = S^1$.

Valem as fórmulas

$$\phi_a(a) = 0, \quad \phi_a(0) = -a, \quad \phi_a'(0) = 1-|a|^2 \ \text{ e } \ \phi_a'(a) = \frac{1}{1-|a|^2}.$$

22. (Blaschke) Seja f analítica em $B(0;1)$, contínua em $D(0;1)$ e com $f(S^1) \subset S^1$.

(a) Mostre que f pode ser escrita na forma

$$f(z) = \omega \prod_{j=1}^{n} \frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}z}, \quad \text{para algum } \ \omega \in S^1.$$

Dica. Considere os zeros de f em $B(0;1)$, contados com repetição se for o caso.

(b) Mostre que se f é também inteira, então temos

$$f(z) = \omega z^n, \text{ para algum } n \in \mathbb{N} \text{ e para todo } z \in \mathbb{C}.$$

23* Seja f analítica em $B(0;2)$, limitada por 10 e tal que $f(1) = 0$. Encontre o possivelmente melhor majorante para

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right|.$$

24* Seja $f : B(0;1) \to B(0;1)$ analítica. Seja $\alpha = f(a)$, onde $a \in B(0;1)$.

(A) Prove

$$|f'(a)| \leq \frac{1-|\alpha|^2}{1-|a|^2}.$$

Sugestão. Considere a composta $\phi_\alpha \circ f \circ \phi_{-a}$ [v. Exercício 21].

(B) Conclua que não existe uma aplicação analítica $f : B(0;1) \to B(0;1)$ tal que

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \ \text{ e } \ f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}.$$

==

25* Suponha que f é limitada e analítica em um aberto contendo $\{z : \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ e também que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Mostre que f é constante.

26. Suponha que ρ, com $0 < \rho < \infty$, é o raio de convergência de $\sum a_n z^n$ e que em um ponto z_0 em $\partial B(0;\rho)$ a série converge absolutamente. Mostre então que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{ converge absoluta e uniformemente em } D(0;\rho).$$