MAT 225 - Funções Analíticas - IMEUSP - Semestre 1 de 2015

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Lista 3 de Exercícios

1. Suponha que a série complexa $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ converge absolutamente. Mostre que também convergem absolutamente as séries

$$(a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} z_n^2 \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z_n}{1+z_n}\,,\ \text{se } z_n \neq -1\,, \forall n \in \mathbb{N}\,, \qquad (c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z_n^2}{1+z_n^2}\ .$$

2. Mostre que converge condicionalmente a série complexa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + i\frac{1}{n^2} \right] .$$

3. Seja $(z_j)_J \subset \mathbb{C}$ uma família somável. Mostre que é enumerável o conjunto

$$\{j \in J : z_j \neq 0\}.$$

4. Sejam $(a_i)_I$ e $(b_j)_J$ duas famílias complexas e somáveis . Mostre

$$\Big(\sum_I a_i \Big)\Big(\sum_J b_j \Big) = \sum_{I \times J} a_i b_j\ .$$

5. Compute, para $|z| < 1$,

$$1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots.$$

6. Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos inteiros. Mostre a divergência da soma

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \frac{1}{m^2+n^2+1}\ .$$

7. Seja $a_{mn} = \frac{(-1)^{m+n}}{mn}$, com $m, n \in \{1, 2, \ldots\}$. Mostre que não existe

$$\sum_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{mn}.$$

Porém, existem

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} a_{mn}\,, \qquad \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn}.$$

8. Considere a série complexa

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(z + \frac{1}{2}\right)^k .$$

Verifique as afirmações abaixo.

   (a) A série converge se $|z + \frac{1}{2}| < 1$.

   (b) Se as potências de $(z + \frac{1}{2})$ são expandidas e a expressão obtida é então rearranjada como uma série em potências de z, então a nova série de potências não converge em $z = -1$.

   (c) Explique a "aparente contradição" com a Lei Associativa neste caso.

9. Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa, com Ω aberto. Mostre que é holomorfa a função

$$g(z) = \overline{f(\overline{z})}, \text{ onde } z \in O = \{\overline{z} : z \in \Omega\}.$$

10. A função $f(z) = z\mathrm{Re}(z)$, com $z \in \mathbb{C}$, é $\mathbb{C}$-diferenciável apenas em $z = 0$.

11. Sejam f e g funções complexa-deriváveis [isto é, $\mathbb{C}$-diferenciáveis] em z_0, com $g'(z_0) \neq 0$ e $f(z_0) = g(z_0) = 0$. Mostre que vale a regra de L'Hospital:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

12. Para cada uma das séries abaixo, determine o raio de convergência.

$$(a) \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \qquad (b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} \qquad (c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2} \qquad (d) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad (e) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{np}}{n} \ (p \in \mathbb{N}^*).$$