

LISTA 2 DE EXERCÍCIOS

Demonstre as afirmações e resultados abaixo.

1. (Princípio do Módulo Máximo para Polinômios) Seja $P(z)$ um polinômio não constante. Então, $|P|$ não tem máximo local.
2. (Princípio do Módulo Mínimo para Polinômios) Seja $P(z)$ um polinômio não constante. Então, ou $|P|$ não tem mínimo local ou existe z_0 tal que $P(z_0) = 0$.
3. O Princípio do Módulo Mínimo para Polinômios implica o TFA.
4. Teorema da Aplicação Aberta para Polinômios (TAAP). Dado P um polinômio não constante e O aberto em \mathbb{C} , o conjunto $P(O)$ é aberto em \mathbb{C} .
 Dicas. (1) Sem aplicar o TFA e os princípios acima, adapte a prova do TFA e a famosa idéia de Carathéodory [*Complex Analysis*, 3rd ed., Bak & Newman, p. 93].
 (2) Use o TFA e os princípios acima (se preciso) e a idéia de Carathéodory.
5. O TAAP implica: (a) o TFA, (b) o Princípio do Módulo Mínimo para Polinômios e (c) o Princípio do Módulo Máximo para Polinômios.
6. Propriedade Poligonal do Valor Médio - Kakutani-Nagamo (1935) e Walsh (1936). Seja $P(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ um polinômio e ω uma primitiva das raízes $2n$ -ésimas da unidade (logo, $\omega^n = -1$). Então temos

$$P(z_0) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} P(z_0 + z\omega^k), \text{ quaisquer que sejam } z_0 \text{ e } z \text{ em } \mathbb{C}.$$

Dica. Considere $z_0 = 0$ e os polinômios $P_k(z) = P(z\omega^k)$, com $0 \leq k \leq 2n - 1$.

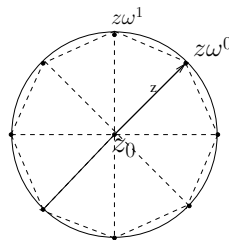


Figura 1: Propriedade Poligonal do Valor Médio, com $n = 4$

7. Aplique a propriedade poligonal do valor médio (e o TFA) e faça uma prova “bastante elementar” do princípio do módulo máximo para polinômios.
8. Mostre que a Desigualdade de Gutzmer-Parseval (para Polinômios) implica o Princípio do Módulo Máximo (para polinômios). [Leia os comentários em *Functions of One Complex Variable I*, second edition, Conway, pp. 79-80.]