ELIPSE (em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{C}$) - MAT 225 - FUNÇÕES ANALÍTICAS- IMEUSP
Semestre 1 de 2015
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira (oliveira@ime.usp.br)

1. Sejam, no plano cartesiano, o vetor posição (variável) $r = \langle x, y\rangle$ e os vetores fixos $r_1 = \langle x_1, y_1\rangle$ e $r_2 = \langle x_2, y_2\rangle$. Descreva o conjunto dos pontos r tais que

$$|r - r_1| + |r - r_2| = R, \quad \text{onde } R > |r_1 - r_2|.$$

Solução.

Antes de tudo, atentemos para a geometria para então simplificar a equação.

Chamemos s a reta pelos pontos r_1 e r_2 (desenhe) e

$$C = \frac{r_1 + r_2}{2} \text{ o ponto médio entre } r_1 \text{ e } r_2.$$

Trace por C a reta t, perpendicular à reta s e mediatriz do segmento $\overline{r_1 r_2}$.

Só há 2 pontos em t com soma das distâncias a r_1 e r_2 igual a R (tais pontos distam $R/2$ de r_1 e também de r_2).

Tais pontos são simétricos em relação à reta s, que passa por r_1 e r_2.

Desenhando é fácil ver, por semelhança de triângulos, que se r é um ponto da figura ($|r - r_1| + |r - r_2| = R$), então r', o simétrico de r em relação à reta s, satisfaz a mesma equação que r. Logo, a figura a determinar é simétrica em relação à reta s.

Para o mesmo r, o ponto r'', simétrico de r em relação à reta t (perpendicular ao segmento $\overline{r_1 r_2}$), também tem a propriedade: a soma de suas distâncias aos pontos r_1 e r_2 é também R. Logo, a figura a determinar é simétrica em relação à reta t.

A figura tem eixos de simetria perpendiculares (as retas t e s) e um centro [o ponto $C = (r_1 + r_2)/2$]. Assim, para desenhá-la basta faze-lo em um quadrante e então refletir em relação às retas t e s.

Seja x a reta t, indiquemos por y a reta s e adotemos $C = (r_1 + r_2)/2$ como a origem O do sistema de coordenadas.

Nesse sistema de coordenadas Oxy temos $r_1 = (\pm c, 0)$ e $r_2 = (\mp c, 0)$.

Suponhamos então

$$c > 0, \quad r = (x, y), \quad r_2 = (-c, 0) \;\; \text{e} \;\; r_1 = (c, 0).$$

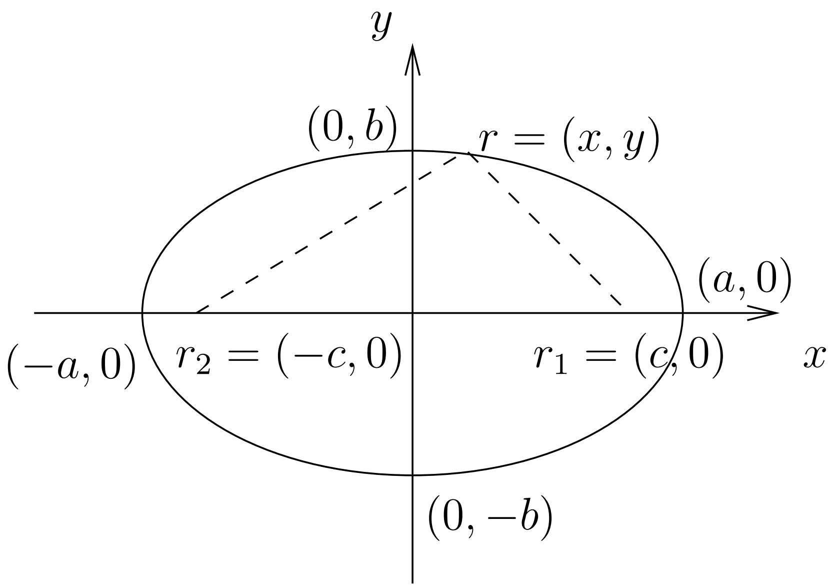

Figura 1: Elipse com focos r_1 e r_2

Assim, a equação adquire a forma

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = R \quad .$$

Agora, solicito ao leitor eliminar as raízes quadradas e encontrar o formato padrão (não é difícil, vide próxima página):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \,\blacksquare$$

Vide próxima página para uma solução em $\mathbb{C}$.

2. Consideremos o problema anterior na variável $z \in \mathbb{C}$:

$$(2.1) \qquad |z - z_1| + |z - z_2| = 2a\,,\ 2a > |z_1 - z_2|\,,$$

com z_1 e z_2 fixos, e distintos, em $\mathbb{C}$ e a um real, $a > 0$. Temos,

$$\begin{cases} z - z_1 = z - \frac{z_1+z_2}{2} - \frac{z_1-z_2}{2} = w - \frac{z_1-z_2}{2} \\ z - z_2 = z - \frac{z_1+z_2}{2} + \frac{z_1-z_2}{2} = w + \frac{z_1-z_2}{2} \end{cases}$$

Se

$$\gamma = \frac{z_1 - z_2}{2},$$

pela translação

$$z \mapsto w = z - \frac{z_1 + z_2}{2}$$

mudamos a equação (2.1) para

$$(2.2) \qquad |w - \gamma| + |w + \gamma| = 2a\ .$$

Como $\frac{\gamma}{|\gamma|}$ tem módulo 1, a aplicação

$$\zeta \mapsto w = \frac{\gamma}{|\gamma|}\zeta$$

é uma rotação e mudamos (2.2) para

$$\left|\frac{\gamma}{|\gamma|}\zeta - \gamma\right| + \left|\frac{\gamma}{|\gamma|}\zeta + \gamma\right| = 2a.$$

Então, pondo $\frac{\gamma}{|\gamma|}$ em evidência e notando que $|\frac{\gamma}{|\gamma|}| = 1$ e em seguida simplificando encontramos

$$\big|\,\zeta - |\gamma|\big| \ + \ \big|\,\zeta + |\gamma|\big| = 2a.$$

Pondo $c = |\gamma| > 0$ obtemos (notando que $c = |\gamma| = \frac{|z_1 - z_2|}{2} < a$)

$$\big|\,\zeta - c\big|^2 = \big[\ 2a\ -\ \big|\,\zeta + c\big|\ \big]^2.$$

A seguir, expressando ζ na forma $\zeta = u + iv$, onde $u\,, v \in \mathbb{R}$ (distinguindo de $z = x + iy$ para a variável z), encontramos

$$(u - c)^2 + v^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(u + c)^2 + v^2} + (u + c)^2 + v^2\,,$$

$$-2cu = 4a^2 - 4a\sqrt{(u + c)^2 + v^2} + 2cu\,,$$

$$4a\sqrt{(u + c)^2 + v^2} = 4a^2 + 4cu.$$

Então, cancelando o 4 e elevando ao quadrado temos

$$a^2u^2 + 2a^2cu + a^2c^2 + a^2v^2 = a^4 + 2a^2cu + c^2u^2\,,$$

$$(a^2 - c^2)u^2 + a^2v^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Desta forma, dividindo por $a^2(a^2 - c^2)$ segue

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{a^2 - c^2} = 1\ .$$

Finalmente, como $a^2 - c^2 > 0$, pois $0 < c < a$, concluímos que existe $b > 0$ tal que $a^2 - c^2 = b^2$ e portanto

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1 \blacksquare$$

Tarefa. represente geometricamente as transformações realizadas.