Prova Substitutiva de Cálculo Diferencial e Integral IV - MAT221
2ª semestre de 2008

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
Total	

Nome : ___________________*GABARITO*___________________
NºUSP : ____
Professor : **Oswaldo Rio Branco de Oliveira**

1. Verifique se são convergentes ou divergentes as séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(ln\, n)^3}{n^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(ln\, n)^{10}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}{n^2+3n+1}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2}$

Resolução

(a) A função $f(x) = \ln x$ é lentamente crescente, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$ e, como $\sum^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < \infty$, pelo critério do limite a série dada converge.

(b) Temos, $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^{10}} \geq 0$ é decrescente e $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^{10}}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{dy}{y^{10}} < \infty$. Pelo critério da integral a série dada converge.

(c) Temos, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}{n^2+3n+1} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}} \leq +\infty$. Logo, pelo critério da comparação, a série dada converge.

(d) Temos, para $a_n = \frac{2^n}{n^2}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}\frac{n^2}{2^n} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to 2$, se $n \to +\infty$. Logo, pelo critério da razão a série dada diverge ■

2. São convergentes ou divergentes as séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!+n^2}{(n+1)!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots 2n}$

Resolução

(a) Temos, $\sum^{+\infty} \frac{n!+n^2}{(n+1)!} \geq \sum^{+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \sum^{+\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty$. Logo, a série dada diverge.

(b) Procurando aplicar o teste da razão temos,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1.3.5....(2n-1)(2n+1)}{2.4.6.....2n(2n+2)} \frac{2.4.6.....2n}{1.3.5.......(2n-1)} = \frac{2n+1}{2n+2} \to 1 \;\; n \to +\infty \; .$$

Pelo Critério de Raabe,

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n\left(1-\frac{2n+1}{2n+2}\right) = n\frac{1}{2n+2} \to \frac{1}{2} \; .$$

Logo, a série dada diverge ■

3. Compute a série binominal para $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ e indique o domínio de convergência.

Resolução

Pelo teorema do binômio temos

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} \;=\; 1+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2).....(\frac{1}{2}-n+1)}{1.2.3.......n}x^n \;=$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{(-1)}{2.1}\,\frac{1}{2.2}\,\frac{3}{2.3}\,\frac{5}{2.4}.....\,\frac{2n-3}{2.n}\,x^n \;,|x|<1\;.$$

Afirmação: a série acima converge absolutamente em $x=1$.

Verificação Se $a_n, n\geq 1$, é o termo geral da série então

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \;=\; \frac{2(n+1)-3}{2(n+1)} = \frac{2n-1}{2(n+1)} = \frac{2n-1}{2n+2} \quad\to\; 1\;.$$

e o critério da razão não decide sobre a convergência absoluta em $x=1$. Mas, mostra que o raio de convergência é 1.

Aplicando o critério de Raabe encontramos

$$n\left(1-\frac{2n-1}{2n+2}\right) \;=\; n\frac{3}{2n+2} = \frac{3n}{2n+2} \quad\to\quad \frac{3}{2}>1\;,$$

e assim a série converge absolutamente em $x=1$. Logo, em $x=-1$ também.

Assim, o domínio de convergência é $[-1,+1]$.

Adendo: Como a convergência é absoluta em $x=1$, a série (binomial) de potências é majorada, termo a termo, por uma sequência numérica $(|a_n|)$ em $[-1,+1]$ cuja série numérica associada é convergente. Pelo Teste-M de Weierstrass, a série binomial converge uniformemente em $[-1,+1]$ e, sendo uma série de funções contínuas, o limite é uma função contínua em $[-1,+1]$. Ainda, o valor da série em $(-1,+1)$ é $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ que é contínua em $[-1,+1]$. Concluímos então a igualdade das funções em $[-1,+1]$:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{(-1)}{2.1}\,\frac{1}{2.2}\,\frac{3}{2.3}\,\frac{5}{2.4}.....\,\frac{2n-3}{2.n}\,x^n \;,|x|\leq 1 \qquad \blacksquare$$

4. (a) Verifique que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ converge uniformemente, em $I\!R$.

(b) Compute $\displaystyle\int_0^1 s(x)\,dx$.

Resolução

(a) O termo geral da série de funções contínuas satisfaz $\frac{1}{x^2+n^2} \leq \frac{1}{n^2}, x \in [0,1]$, e, $\sum^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$. Pelo teste-M de Weierstrass $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ converge uniformemente em $[0,1]$ a uma função também contínua $s : [0,1] \to \mathbb{R}$.

(b) Pelo teste-M de Weierstrass integramos a série termo a termo e obtemos,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+n^2}\,dx \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{1}{x^2+n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{n dy}{1+y^2} \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \arctan n \qquad \blacksquare$$

5. Resolva a equação

$$(1) \qquad \ddot{x} + 4\,\dot{x} + 5x = e^{\alpha t}\mathrm{sen}\beta t,$$

onde α e β são reais dados.

Resolução

O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5$, com raízes $\lambda = -2 \pm i$.
A solução geral da homogênea é $x_h = c_1 e^{-2t} cost + c_2 e^{-2t} sent$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Se $\beta = 0$ a equação dada é homogênea e a solução geral é a geral da homogênea.
Se $\beta \neq 0$, determinemos $z_p(t)$, solução particular da equação complexa,

$$z'' + 4z' + 5z = e^{\gamma t}\,, \gamma = \alpha + i\beta.$$

A solução particular procurada de (1), $x_p(t)$, é a parte imaginária de $z_p(t)$.
Procurando uma solução particular $z_p(t) = Q(t)e^{\gamma t}$ encontramos a edo:

$$\frac{p''(\gamma)}{2!}Q'' + \frac{p'(\gamma)}{1!}Q' + \frac{p(\gamma)}{0!}Q = 1 \;\; ou, \;\; (*) \;\; Q'' + p'(\gamma)Q' + p(\gamma)Q = 1 \;.$$

Caso I: $\gamma \neq -2 \pm i$ (γ não é raíz característica).
Então, $p(\gamma) \neq 0$, $Q(t) = \frac{1}{p(\gamma)}$ satisfaz (*), $z_p = \frac{e^{\gamma t}}{p(\gamma)}$ é sol. part. em $\mathbb{C}$ e,

$$x_p(t) = Im\{\, z_p(t) \,\} = Im\left\{ \frac{\overline{p(\gamma)}e^{\gamma t}}{|p(\gamma)|^2} \right\} = \frac{1}{|p(\gamma)|^2} Im\{\, p(\overline{\gamma})e^{\gamma t} \,\},$$

com

$$e^{\gamma t} = e^{\alpha t}(cos\beta t \,+\, isen\beta t) \;\;,$$
$$p(\gamma) = (\alpha^2 + 4\alpha + 5 - \beta^2) + \beta(2\alpha + 4)i = p(\alpha) - \beta^2 + \beta p'(\alpha)i \;,$$
$$|p(\gamma)|^2 = [\,p(\alpha) - \beta^2\,]^2 \;+\; [\,\beta p'(\alpha)\,]^2 \;.$$
$$p(\overline{\gamma}) = p(\alpha) - \beta^2 - \beta p'(\alpha)i \;.$$

Caso II: $\gamma = -2 \pm i$**.** Isto é, γ é raíz simples, $p(\gamma) = 0$, $p'(\gamma) \neq 0$.
Então (*) se escreve: $Q'' + p'(\gamma)Q' = 1$. Escolhemos $Q'(t) = \frac{1}{p'(\gamma)}$ e $Q(t) = \frac{t}{p'(\gamma)}$ e obtemos $z_p(t) = \frac{te^{\gamma t}}{p'(\gamma)}$ e,

$$x_p(t) = Im\left\{ \frac{\overline{p'(\gamma)}te^{\gamma t}}{|p'(\gamma)|^2} \right\} = \frac{t}{|p'(\gamma)|^2} Im\{\, p'(\overline{\gamma})e^{\gamma t} \,\} \;.$$

Se $\gamma = -2 + i$ então $p'(\gamma) = 2\gamma + 4 = 2i$, $p'(\overline{\gamma}) = \overline{p'(\gamma)} = -2i$, $|p'(\gamma)|^2 = 4$ e

$$x_p = \frac{t}{4} Im\{-2ie^{-2t}(cost + isent)\} \;\; = -\frac{t}{2}e^{-2t}cost \;.$$

Se $\gamma = -2 - i$, analogamente, encontramos $x_p = \frac{t}{2}e^{-2t}cost$ ■

6. Resolva a equação $x''' - x'' + 3x' - 3x = t^3 e^t$.

Resolução:

Raízes características de $p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + 3\lambda - 3 = (\lambda^2 + 3)(\lambda - 1)$: $\pm\sqrt{3}\, i$ e 1.
A solução geral da homogênea é: $x_h = c_1 cos\sqrt{3}\, t \; + \; c_2 sen\sqrt{3}\, t \; + \; c_3 e^t$.

Temos também, $p'(\lambda) = 3\lambda^2 - 2\lambda + 3$, $p''(\lambda) = 6\lambda - 2$ e $p''' = 6$.
Procurando uma solução particular da forma $x_p = Q(t)e^t$ enontramos a edo,

$$\frac{p'''(1)}{3!}Q''' \; + \; \frac{p''(1)}{2!}Q'' \; + \; \frac{p'(1)}{1!}Q' \; + \; \frac{p(1)}{0!}Q = t^3 \quad ,$$

ou,

$$Q''' \; + \; 2Q'' \; + \; 4Q' \; = \; t^3 \; .$$

Substituindo $q = Q'$ na equação acima obtemos

$$q'' \; + \; 2q' \; + \; 4q \; = \; t^3 \; .$$

Cuja solução é um polinômio de grau 3, $q(t) = \; \frac{t^3}{4} + bt^2 + ct + d$.
É trivial: $4b + \frac{3}{2} = 0$, $b = -\frac{3}{8}$, $4c + 4b + \frac{3}{2} = 0$, $c = 0$ e $4d + 2c + 2b = 0$, $d = \frac{3}{16}$.
Assim, $q(t) = \frac{t^3}{4} \; - \; \frac{3t^2}{8} \; + \; \frac{3}{16}$, $Q(t) = \frac{t^4}{16} \; - \; \frac{t^3}{8} \; + \; \frac{3t}{16} \; = \; \frac{t}{16}(t^3 \; - \; 2t^2 \; + 3)$.
Então,

$$x_p(t) = \; \frac{t}{16}(t^3 \; - \; 2t^2 \; + 3)e^t \; ,$$

é uma solução particular e a solução geral do problema é,

$$x_G \; = \; x_h \; + \; x_p \; = \; c_1 cos\sqrt{3}\, t \; + \; c_2 sen\sqrt{3}\, t \; + \; c_3 e^t \; + \frac{t}{16}(t^3 \; - \; 2t^2 \; + 3)e^t \qquad \blacksquare$$

7. Seja $f(x) - \cos x, 0 < x < \pi$.

(a) Determine a série de senos de f.

(b) Mostre que $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{16} = \dfrac{1}{2^2-1} - \dfrac{3}{6^2-1} + \dfrac{5}{10^2-1} - \dfrac{7}{14^2-1} + \cdots$

Resolução

(a) Seja $F(x) = -cosx\,, x \in (-\pi, 0)$, $F(x) = cosx\,, x \in (0,\pi)$, $F(-\pi) = F(0) = F(\pi)$. Então, F é ímpar e os coeficientes $(a_n)'s$ são nulos. Ainda,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x) sen\, nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} cos\, x sen\, nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\, sen(n{+}1)x + sen(n{-}1)x\,]dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{cos(n+1)x}{n+1}\Big|_0^{\pi} + \frac{cos(n-1)x}{n-1}\Big|_0^{\pi}\right] =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}\right] = \frac{(-1)^n+1}{\pi}\frac{2n}{n^2-1}.$$

Logo, $b_n = 0$ se n ímpar e $b_n = \frac{4n}{\pi(n^2-1)}$ se n é par. Assim, $b_{2k} = \frac{8k}{\pi[(2k)^2-1]}$, $k \geq 1$.

Portanto,

$$F(x) \sim \frac{8}{\pi}\sum_{k\geq 1}\frac{k}{(2k)^2-1} sen(2kx)\ .$$

(b) Em $x = \frac{\pi}{4}$, $sen(2kx) = sen\,\frac{k\pi}{2} = 0$, se k é par e, para $k = 2p+1$, $p \geq 0$, $sen(2kx) = sen\frac{(2p+1)\pi}{2} = (-1)^p$, $\forall p \geq 1$. Portanto,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{8}{\pi}\sum_{p\geq 0}\frac{(2p+1)(-1)^p}{[\,2(2p+1)\,]^2-1} = \frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{2^2-1} - \frac{3}{6^2-1} + \frac{5}{(10)^2-1} + ...+\right) \blacksquare$$