MAT 221- CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV
Lista 8 - Roteiro para EDOL's com Coeficientes Constantes Reais.
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Segundo Semestre de 2008

1. Os símbolos $P = P(t)$ e $Q = Q(t)$ designam polinômios.

   (a) Dado $n \in \mathbb{N}$, $\int t^n e^t dt = t^n e^t - n \int t^{n-1} e^t dt$.

   (b) Dado P temos $\int P(t)e^t dt = Q(t)e^t$, com grau($Q$)=grau($P$).

   Prova Trivial.

2. Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ e P um polinômio.

   (a) $(\frac{d}{dt} - \alpha I)^{j+1}(t^j e^{\alpha t}) = 0, \ \ \forall j \in \{0, 1, 2, ...\} = \mathbb{N}$.

   (b) Se $n \geq 1$, $(\frac{d}{dt} - \alpha I)^n (\, t^j e^{\alpha t}\,) = 0$, para $j = 0, 1, 2, ..., n - 1$.

   (c) Se α é raíz de multiplicidade n de P então $P(\frac{d}{dt})\{\, t^j e^{\alpha t}\,\} = 0$, $j = 0, 1, ..., n - 1$.

   Prova:

   (a) A afirmação é óbvia se $j = 0$. Supondo verdadeira para $j - 1$, $j \geq 1$, temos

$$\begin{aligned}(\frac{d}{dt} - \alpha I)^{j+1}(t^j e^{\alpha t}) &= (\frac{d}{dt} - \alpha I)^j (\frac{d}{dt} - \alpha I)(t^j e^{\alpha t}) = \\ &= (\frac{d}{dt} - \alpha I)^j (j t^{j-1} e^{\alpha t} + \alpha t^j e^{\alpha t} - \alpha t^j e^{\alpha t}) = \\ &= j(\frac{d}{dt} - \alpha I)^j (t^{j-1} e^{\alpha t}) = 0 \ .\end{aligned}$$

   (b) Segue trivialmente de (a) pois $n \geq j + 1$.

   (c) Segue de (b), pela fatoração $P(\frac{d}{dt}) = Q(\frac{d}{dt})(\frac{d}{dt} - \alpha I)^n$, Q um polinômio ∎

3. Seja $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, α, $\beta \in \mathbb{R}^*$. O espaço vetorial complexo das combinações lineares de $e^{(\alpha+i\beta)t}$ e $e^{(\alpha-i\beta)t}$, com coeficientes em $\mathbb{C}$, é igual ao das combinações lineares de $e^{\alpha t} cos\beta t$ e $e^{\alpha t} sen\beta t$, com coeficientes complexos. Temos então,

   (a) $span_{\mathbb{C}} \left\{ e^{(\alpha+i\beta)t}, e^{(\alpha-i\beta)t} \right\} = span_{\mathbb{C}} \left\{ e^{\alpha t} cos\beta t\, , e^{\alpha t} sen\beta t \right\}$

   (b) $\{\, e^{(\alpha+i\beta)t}, e^{(\alpha-i\beta)t}\,\}$ e $\{\, e^{\alpha t} cos\beta t, e^{\alpha t} sen\beta t\,\}$ são L.I. sobre $\mathbb{C}$.

   (c) $\{\, e^{\alpha t} cos\beta t, e^{\alpha t} sen\beta t\,\}$ é também linearmente independente sobre $\mathbb{R}$.

   Prova

   (a) Óbvio.

   (b) Em geral, é fácil ver, $\{\, e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\}$, $\lambda_1\, , \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, é L.I. sobre $\mathbb{C}$. Assim, por (a), $span_{\mathbb{C}}\{\, e^{\alpha t} cos\beta t, e^{\alpha t} sen\beta t\,\}$ têm dimensão dois e, $\{\, e^{\alpha t} cos\beta t, e^{\alpha t} sen\beta t\,\}$ é L.I. sobre $\mathbb{C}$.

   (c) Consequência imediata de (b) ∎

EDOL's de ordem 2 com coeficientes constantes reais e não homogêneas.

Notação: P, Q, R, P_1 e R_1 são polinômios, grau(P_1) =grau(P) e grau(R_1) =grau(R).

O resultado abaixo é generalizado em 8, com demonstração análoga.

4. A edo $x'' + bx' + cx = P(t)$, $b, c \in \mathbb{R}$ tem solução particular $x_p = x_p(t)$ na forma:

   (a) $x_p(t) = Q(t)$, Q um polinômio.

   Ainda, para Q em (a),

   (b) Se $c \neq 0$, podemos supor grau(Q) =grau(P).

   (c) Se $c = 0$ e $b \neq 0$, podemos supor $Q = tP_1(t)$, grau(P_1) =grau(P).

   (d) Se $c = b = 0$, podemos supor $Q = t^2 P_1(t)$, grau(P_1) =grau(P).

Prova

(a) Seja $p(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Então,

$$x'' + bx' + cx = P(\frac{d}{dt})x = (\frac{d}{dt} - \alpha I)(\frac{d}{dt} - \beta I)x \ .$$

Resolvamos $(\frac{d}{dt} - \alpha I)f = f' - \alpha f = P$. Temos,

$$f' - \alpha f = P \Leftrightarrow [\, f(t)e^{-\alpha t}\,]' = P(t)e^{-\alpha t} \Leftrightarrow f(t)e^{-\alpha t} = \int P(t)e^{-\alpha t}\,dt \ .$$

Sendo α não nulo, ou sim, pela afirmação 1 temos $\int P(t)e^{-\alpha t}dt = R(t)e^{-\alpha t}$ e assim, $f(t) = R(t)$ e iterando, para $(\frac{d}{dt} - \beta I)x = R$ temos $x(t) = Q(t)$, Q um polinômio.

(b) Como $c = \alpha\beta \neq 0$, pela afirmação 1, Q e R acima tem mesmo grau que P.

(c) Podemos supor que $\beta = 0$ é raíz característica simples. Pela afirmação 1 R, em (a), tem mesmo grau que P e $x(t) = \int R(t)dt$ pode ser escolhido como $Q(t) = tP_1(t)$.

(d) A equação é $x'' = P$ e, é óbvio, podemos escolher $x(t) = t^2 P_1$ $\blacksquare$

O resultado que segue é trivial, com prova elementar que inspira a generalização e a demonstração em (10), importantes por si. Em (8) temos uma generalização com o método aqui enfatizado: **fatoração**.

5. A equação $x'' + bx' + cx = P(t)e^{\gamma t}$, P um polinômio e $\gamma \in \mathbb{R}$ tem em $x_p(t) = Q(t)e^{\gamma t}$ uma solução particular se se somente se,

$$Q'' + p'(\gamma)Q' + p(\gamma)Q = P .$$

Por 4, tal solução particular existe e podemos supor,

(a) grau(Q) =grau(P), se γ não é raíz característica da equação.

(b) $Q(t) = tP_1(t)$, grau(P_1) =grau(P), se γ é raíz simples.

(c) $Q(t) = t^2 P_1$, grau(P_1) =grau(P), se γ é raíz dupla.

Prova

Temos $x_p' = Q'e^{\gamma t} + \gamma Q e^{\gamma t}$, $x_p'' = Q''e^{\gamma t} + 2Q'\gamma e^{\gamma t} + Q\gamma^2 e^{\gamma t}$. Substituindo, a equação dada é equivalente a

$$(Q'' + 2Q'\gamma + Q\gamma^2)e^{\gamma t} + b(Q' + \gamma Q)e^{\gamma t} + cQe^{\gamma t} = Pe^{\gamma t} ,$$

isto é,

$$Q'' + (2\gamma + b)Q' + (\gamma^2 + b\gamma + c)Q = P ,$$

e, para $p(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c$, temos $p'(\lambda) = 2\lambda + b$ e, substituindo,

$$Q'' + p'(\gamma)Q' + p(\gamma)Q = P .$$

A conclusão segue de (4) pois as condições nos ítens (a), (b) e (c) equivalem a, respectivamente, $p(\alpha) \neq 0$, $p(\alpha) = 0$ e $p'(\alpha) \neq 0$ e, por último, $p(\alpha) = p'(\alpha) = 0$ ∎

6. Consideremos o operador $P(\frac{d}{dt})x = x'' + bx' + cx$, com $b, c \in \mathbb{R}$.

(a) Se $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ são de classe C^2 e $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ então,

$$(z_1x + z_2y)'' + b(z_1x + z_2y)' + c(z_1x + z_2y) = z_1(x'' + bx' + cx) + z_2(y'' + by' + cy).$$

(b) Se $x(t) = e^{\gamma t}$, $\gamma \in \mathbb{C}$, então $P(\frac{d}{dt})(e^{\gamma t}) = p(\gamma)e^{\gamma t}$ e,

(i) $P(\frac{d}{dt})\{ Re(e^{\gamma t}) \} = Re[\, p(\gamma)e^{\gamma t}\,]$.

(ii) $P(\frac{d}{dt})\{ Im(e^{\gamma t}) \} = Im[\, p(\gamma)e^{\gamma t}\,]$.

(c) Se $p(\gamma) \neq 0$, definindo $Z(t) = \frac{e^{\gamma t}}{p(\gamma)}$,

$$P(\frac{d}{dt})(\, Z(t)\,) = e^{\gamma t},$$

e escrevendo $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ temos,

$$P(\frac{d}{dt})\{ Re[\, Z(t)\,] \} = e^{\gamma_1 t} cos\gamma_2 t ,$$

$$P(\frac{d}{dt})\{ Im[\, Z(t)\,] \} = e^{\gamma_1 t} sen\gamma_2 t .$$

(d) Se $M, N \in \mathbb{R}$, existem $A, B \in \mathbb{R}$ tais que,

$$P(\frac{d}{dt})(Ae^{\gamma_1 t}cos\gamma_2 t \; + \; Be^{\gamma_1 t}sen\gamma_2 t) \; = \; Me^{\gamma_1 t}cos\gamma_2 t \; + \; Ne^{\gamma_1 t}sen\gamma_2 t \; .$$

(e) Para $\gamma \in \mathbb{C}$ temos, $P(\frac{d}{dt})\{\, te^{\gamma t} \,\} \; = \; p(\gamma)te^{\gamma t} \; + \; p'(\gamma)e^{\gamma t}$.

(f) Se $\gamma \notin \mathbb{R}$ é raíz característica $\Rightarrow \gamma, \overline{\gamma}$ são raízes simples, $p(\gamma) = 0$, $p'(\gamma) \neq 0$,

$$P(\frac{d}{dt})\left\{ \frac{te^{\gamma t}}{p'(\gamma)} \right\} \; = \; e^{\gamma t} \; ,$$

e, escrevendo $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, e definindo $\mathcal{Z}(t) = \frac{e^{\gamma t}}{p'(\gamma)}$ têm-se,

$$P(\frac{d}{dt})\{\, tRe\,[\,\mathcal{Z}(t)\,]\,\} \; = \; e^{\gamma_1 t}cos\gamma_2 t \, ,$$

$$P(\frac{d}{dt})\{\, tIm\,[\,\mathcal{Z}(t)\,]\,\} \; = \; e^{\gamma_1 t}sen\gamma_2 t \, .$$

(g) Dados $M, N \in \mathbb{R}$, existem $A, B \in \mathbb{R}$ tais que,

$$P(\frac{d}{dt})(Ate^{\gamma_1 t}cos\gamma_2 t \; + \; Bte^{\gamma_1 t}sen\gamma_2 t) \; = \; Me^{\gamma_1 t}cos\gamma_2 t \; + \; Ne^{\gamma_1 t}sen\gamma_2 t \; .$$

Demonstração

Os ítens (a), (b) e (c) são triviais.

(d) Segue de (c) bastando notar que,

$$Re[Z(t)], \; Im[Z(t)] \; \in span\{\, e^{\gamma_1 t}cos\gamma_2 t \; , e^{\gamma_1 t}sen\gamma_2 t \,\} \; .$$

(e) Analogamente a (5) temos,

$$(te^{\gamma t})' = e^{\gamma t} + \gamma te^{\gamma t} \quad , \quad (te^{\gamma t})'' = \gamma^2 te^{\gamma t} + 2\gamma e^{\gamma t} \; ,$$

e substituindo,

$$P\{\, \frac{d}{dt}(e^{\gamma t}\,\} \; = \; [\,(\gamma^2 t \, + \, 2\gamma) \, + \, b(1 \, + \, \gamma t) + ct\,]e^{\gamma t} \; = \; [(\gamma^2 + b\gamma \, + \, c)t + (2\gamma + b)]e^{\gamma t} =$$

$$= p(\gamma)te^{\gamma t} + p'(\gamma)e^{\gamma t} \; .$$

(f) Trivial.

(g) Segue de (f) bastando notar,

$$tRe[\mathcal{Z}(t)], \; tIm[\mathcal{Z}(t)] \; \in span\{\, te^{\gamma_1 t}cos\gamma_2 t \, , te^{\gamma_1 t}sen\gamma_2 t \,\} \quad \blacksquare$$

EDOL's de ordem 3 com coeficientes constantes reais e homogêneas

7. Seja $x''' + ax'' + bx' + d = 0$, a,b,c, $d \in \mathbb{R}$ e λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \mathbb{C}$ as raízes características. Seguem as bases padrões de soluções fundamentais para o espaço solução.

   (a) $\{e^{\lambda_1 t},\ e^{\lambda_2 t},\ e^{\lambda_3 t}\}$ se as raízes são reais distintas.

   (b) $\{e^{\lambda_1 t},\ te^{\lambda_1 t},\ e^{\lambda_2 t}\}$ se λ_1 é raíz real dupla e λ_2 é raíz real simples.

   (c) $\{e^{\lambda_1 t},\ te^{\lambda_1 t},\ t^2 e^{\lambda_1 t}\}$ se λ_1 é raíz real tripla.

   (d) $\{e^{\alpha t} cos\beta t,\ e^{\alpha t} sen\beta t,\ e^{\lambda_2 t}\}$ se $\lambda_1 \notin \mathbb{R}$ e $\lambda_2 \in \mathbb{R}$.

   Demonstração

   (a), (b), (c) É trivial ver que os conjuntos de funções são linearmente independentes. Ainda mais, pelo teorema-método de resolução, geram os respectivos espaço de soluções.

   (d) Por (a), $\{e^{(\alpha+i\beta)t}, e^{(\alpha-i\beta)t}, e^{\lambda_3}\}$, com três vetores, é L.I. sobre $\mathbb{C}$. Mas, utilizando (3),

$$span_{\mathbb{C}} \left\{ e^{(\alpha+i\beta)t}, e^{(\alpha-i\beta)t}, e^{\lambda_3 t} \right\} = span_{\mathbb{C}} \left\{ e^{\alpha t} cos\beta t, e^{\alpha t} sen\beta t, e^{\lambda_3 t} \right\} .$$

   Logo, $\left\{ e^{\alpha t} cos\beta t, e^{\alpha t} sen\beta t, e^{\lambda_3 t} \right\}$ é L.I. sobre $\mathbb{C}$ e assim, sobre $\mathbb{R}$ ■

EDOL's de ordem n com coeficientes constantes reais e não homogêneas

Consideremos a edo $P(\frac{d}{dt})x = x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + ...a_2 x'' + a_1 x' + a_0 = f(t)$, com coeficientes reais e polinômio característico $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ...a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$. As raízes características de $p(\lambda)$ são também chamadas por, simplesmente, raízes.

Notação: As letras Q, R, R_1 e S denotam polinômios e, grau(R_1) =grau(R).

8. A edo $P(\frac{d}{dt})x = R(t)$, R um polinômio têm solução particular $x_p = x_p(t)$ na forma:

   (a) $x_p(t) = Q(t)$, Q um polinômio.

   Para Q em (a), podemos supor,

   (b) grau(Q) = grau(R), se $\lambda = 0$ não é raíz característica.

   (c) $Q = t^k R_1(t)$, grau(R_1) = grau(R), se $\lambda = 0$ é raíz de multiplicidade k.

   Demonstração

   (a), (b) e (c) Consideremos a fatoração $P(\frac{d}{dt}) = (\frac{d}{dt} - \lambda_1 I).......(\frac{d}{dt} - \lambda_n I)$.

   Resolvamos $(\frac{d}{dt} - \lambda_1 I)f = f' - \lambda_1 f = R(t)$. Se $\lambda_1 = 0$ temos $f' = R$ e $f = S$, S um polinômio que supomos com termo independente nulo. Logo, $f(t) = tR_1(t)$.

   Se $\lambda_1 \neq 0$, reescrevemo-la $\frac{d}{dt}\{ f(t)e^{-\lambda_1 t} \} = R(t)e^{-\lambda_1 t}$ e, portanto, $f(t)e^{-\lambda_1 t} = \int R(t)e^{-\lambda_1 t}\, dt$. Por (1), $\int R(t)e^{-\lambda_1 t}\, dt = R_1(t)e^{-\lambda_1 t}$. Logo, $f(t)e^{-\lambda_1 t} = R_1(t)e^{-\lambda_1 t}$ e, $f(t) = R_1(t)$.

Em seguida resolvemos $g' - \lambda_2 g = f(t)$ e iteramos o processo. Se 0 não é raíz ao final obtemos uma solução $x_p(t) = R_1(t)$.

Se 0 é raíz de multiplicidade k fatoramos, $P(\frac{d}{dt}) = (\frac{d}{dt} - \lambda_1 I).....(\frac{d}{dt} - \lambda_{n-k} I)(\frac{d}{dt})^k$.

Iterando, após $n-k$ passos obtemos um polinômio $f(t) = R_1(t)$ e passamos a resolver $(\frac{d}{dt})^k x(t) = R_1(t)$, com uma solução $t^k R_2(t)$, R_2 um polinômio, grau(R_2) =grau(R) ∎

9. Consideremos a edo $P(\frac{d}{dt})x = R(t)e^{\gamma t}$, R um polinômio e $\gamma \in \mathbb{R}$. Existe solução particular da forma $x_p(t) = Q(t)e^{\gamma t}$, Q um polinômio. Ainda, podemos supor,

   (a) grau(Q) = grau(R), se γ não é raíz característica da equação.

   (b) $Q(t) = t^k R_1(t)$, grau(R_1) = grau(R), se γ é raíz de multiplicidade k.

Demonstração

(a) Fatorando temos,

$$P(\frac{d}{dt}) = (\frac{d}{dt} - \lambda_1 I)......(\frac{d}{dt} - \lambda_n I) \ , \lambda_i \neq \gamma \ , \forall i \, .$$

Resolvendo $(\frac{d}{dt} - \lambda_1 I)f = f' - \lambda_1 f = R(t)e^{\gamma t}$ temos, $\frac{d}{dt}\{ f(t)e^{-\lambda_1 t} \} = R(t)e^{(\gamma - \lambda_1)t}$, que equivale a $f(t)e^{-\lambda_1 t} = \int R(t)e^{(\gamma-\lambda_1)t}\, dt$.

Como $\gamma - \lambda_1 \neq 0$, por (1), $\int R(t)e^{(\gamma-\lambda_1)t}\, dt = R_1(t)e^{(\gamma-\lambda_1)t}$, grau$(R_1)$ =grau(R). Consequentemente, $f(t)e^{-\lambda_1 t} = R_1(t)e^{(\gamma-\lambda_1)t}$ e, $f(t) = R_1(t)e^{\gamma t}$. Iterando o processo, como já aplicado anteriormente, obtemos uma solução particular pretendida.

(b) Utilizando a fatoração

$$P(\frac{d}{dt}) = S(\frac{d}{dt})(\frac{d}{dt} \ - \ \gamma I)^k \ ,$$

por (a) existe solução de $S(\frac{d}{dt})f = R(t)e^{\gamma t}$, com $f(t) = R_1(t)e^{\gamma t}$, grau$(R_1)$ =grau(R).

Procuremos agora, uma solução de $(\frac{d}{dt} - \gamma I)^k x = f(t) = R(t)e^{\gamma t}$.

Resolvendo $(\frac{d}{dt} - \gamma I)y = y' - \gamma y = R(t)e^{\gamma t}$ encontramos $\frac{d}{dt}\{ y(t)e^{-\gamma t} \} = R(t)$. Logo, $y(t)e^{-\gamma t} = \int R(t)dt$. Escolhendo a primitiva obtemos, $y(t) = tR_1(t)$, grau(R_1) =grau(R).

Assim, iterando o processo obtemos $x(t) = t^k e^{\gamma t}$ ∎

FÓRMULA PARA $P(\frac{d}{dt})\{\,Q(t)e^{\gamma t}\,\}$:

10.

$$P(\frac{d}{dt})\Big\{\,Q(t)e^{\gamma t}\,\Big\} \;=\; \left[\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!}Q^{(n)} \;+\; .... \;+\; \frac{p''(\gamma)}{2!}Q'' \;+\; p'(\gamma)Q' \;+\; p(\gamma)Q\right]e^{\gamma t}\;.$$

Demonstração Escrevendo

$$P(\frac{d}{dt}) = a_n\frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + ... + a_2\frac{d^2}{dt^2} + a_1\frac{d}{dt} + a_0 I\,, a_n = 1\,,$$

computemos $P(\frac{d}{dt})\{\,Q(t)e^{\gamma t}\,\}$ identificando os coeficientes de $Q^{(i)}$. Na expansão de $P(\frac{d}{dt})\{\,Qe^{\gamma t}\,\}$, a i-ésima derivada $Q^{(i)}$ surge nas parcelas com coeficiente a_k, $k \geq i$. Ainda mais, $\frac{d^m}{dt^m}(e^{\gamma t}) = \gamma^m e^{\gamma t}$ e portanto,

$$\frac{d^k}{dt^k}\{\,Q(t)e^{\gamma t}\,\} \;=\; \sum_{p=0}^{p=k}\binom{k}{p}Q^{(p)}\frac{d^{k-p}}{dt^{k-p}}\{e^{\gamma t}\} \;=\; \sum_{p=0}^{p=k}\binom{k}{p}Q^{(p)}\gamma^{k-p}e^{\gamma t}\,.$$

Assim, o coeficiente de $Q^{(i)}$ é o somatório,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\binom{k}{i}\gamma^{k-i}e^{\gamma t}\;.$$

Consideremos agora o polinômio característico

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n \;+\; a_{n-1}\lambda^{n-1} \;+\; a_{n-2}\lambda^{n-2} \;+\; .... \;+\; a_2\lambda^2 + a_1\lambda \;+\; a_0\;,$$

e computando a sua derivada $p^{(i)}$, os monômios $\lambda^m\,, m < i$ desaparecem e obtemos,

$$p^{(i)}(\lambda) \;=\; \sum_{k=i}^{n} a_k\,k(k-1).....(k-i+1)\,\lambda^{k-i} = \sum_{k=i}^{n} a_k\frac{k\,!}{(k-i)!}\lambda^{k-i} =$$

$$= i\,!\sum_{k=i}^{n} a_k\frac{k\,!}{i\,!(k-i)!}\lambda^{k-i} = i\,!\sum_{k=i}^{n} a_k\binom{k}{i}\lambda^{k-i}.$$

Portanto, o coeficiente de $Q^{(i)}$ é

$$\frac{p^{(i)}(\gamma)}{i!}e^{\gamma t}.$$

Consequentemente,

$$P(\frac{d}{dt})\{\,Q(t)e^{\gamma t}\,\} = \sum_{i=0}^{n}\frac{p^{(i)}(\gamma)}{i!}Q^{(i)}(y)e^{\gamma t} =$$

$$= [\;\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!}Q^{(n)} \;+\; .... \;+\; \frac{p''(\gamma)}{2!}Q'' \;+\; p'(\gamma)Q' \;+\; p(\gamma)Q\;]\,e^{\gamma t} \qquad \blacksquare$$