$7^{\underline{a}}$ Lista de MAT221 - Cálculo Diferencial e Integral IV - IME
$2^{\underline{o}}$ semestre de 2008
Professor Oswaldo Rio Branco

1. Mostre que as funções $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ e $e^{\lambda_3 t}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$, são linearmente independentes, sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2. Consideremos a equação diferencial ordinária linear com coeficientes constantes, $\left(\frac{d}{dt} - \alpha I\right)^4 x = 0$ com α real ou complexo. Mostre que as soluções são $x(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 t e^{\alpha t} + c_3 t^2 e^{\alpha t} + c_4 t^3 e^{\alpha t}$, $c_i' s \in \mathbb{R}$ se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $c_i' s \in \mathbb{C}$ se $\alpha \in \mathbb{C}$.

3. Se $n \in \mathbb{N}$, $e^{\alpha t}, te^{\alpha t}, ..., t^{n-1}e^{\alpha t}$, são soluções de $\left(\frac{d}{dt} - \alpha I\right)^n x = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ou não.

4. Resolva as equações de variáveis separáveis

   a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{x}, x > 0$ b) $\frac{dv}{dt} = 4 - v^2$

5. Resolva as equações lineares de $1^{\underline{a}}$ ordem

   a) $\frac{dT}{dt} = -2(T-3)$ b) $\frac{dy}{dx} = -2y + cosx$

6. Uma partícula de massa $m = 1$ desloca-se sobre o eixo $0x$ sob a ação da força elástica $-x\vec{i}$ e de uma força de amortecimento proporcional à velocidade dada por $-2\,\dot{x}\,\vec{i}$. Determine a posição $x = x(t), t \geq 0$, da partícula no instante t e discuta o movimento, supondo

   a) $x(0) = 1$ e $\dot{x}\,(0) = 0$

   b) $x(0) = 1$ e $\dot{x}\,(0) = -2$

7. Uma partícula de massa $m = 1$ desloca-se sobre o eixo $0x$ sob a ação de uma força elástica $-x\vec{i}$ e de uma força de amortecimento proporcional à velocidade dada por $-c\,\dot{x}\,\vec{i}(c > 0)$. Determine c para que o movimento seja:

   a) Fortemente amortecido.

   b) Criticamente amortecido.

   c) Oscilatório amortecido.

8. Determine a solução geral de

   a) $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$ b) $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0$

   c) $\frac{d^4y}{dx^4} - 16y = 0$ d) $\frac{d^4y}{dx^4} - 3\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} = 0$

9. Determine a solução geral

a) $\ddot{x} + x = e^{-t}$

b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y = cosx$

c) $\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = e^{2t}cost$

d) $\dfrac{dy}{dx} + y = x + x^2$

e) $\ddot{x} - 8x = 4 + t$

f) $\ddot{x} + 4x = t + e^t$

10. Determine a solução que satisfaz as soluções iniciais dadas.

a) $\dfrac{dy}{dt} - y = xe^x, y(0) = 1$

b) $\ddot{x} + 4x = cos2t, x(0) = \dot{x}(0) = 0$

c) $\dfrac{d^4x}{dt^4} - 16x = -15\text{sen}t, x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1, \ddot{x}(0) = 0, \dddot{x}(0) = -1$