6ª Lista de MAT221 - Cálculo Diferencial e Integral IV - IME
2º semestre de 2008
Professor Oswaldo Rio Branco

1. Ache a solução geral:

   a) $\dfrac{dx}{dt} - 3x = e^t$ b) $\dfrac{dx}{dt} - x = 2t + 1$ c) $\dfrac{dx}{dt} + 2x = \operatorname{sen} t$

   d) $\dfrac{dx}{dt} - x = 5$ e) $\dfrac{dx}{dt} = 3x + e^{-t}$

2. Resolva as equações:

   a) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} - 3x = 0$ b) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} + x = 0$

   c) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dx}{dt} = 0$ d) $\dfrac{d^2x}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + 9y = 0$

3. Determine a solução do problema:

   a) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 9x = 0$, $x(0) = 1$ e $x'(0) = -1$

   b) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} + y = 0$, $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$

4. Resolva a equação:

   a) $\ddot{x} - 2x = 0$ b) $\ddot{x} + 5\dot{x} + 6x = 0$

5. Polinômio característico com raízes complexas. Resolva a equação:

   a) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dx}{dt} + 5x = 0$ b) $\ddot{x} + 5x = 0$

   c) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 5\dfrac{dy}{dt} = 0$ d) $\ddot{x} + 8\dot{x} + 20x = 0$

6. Determine a solução geral:

   a) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 3x = \cos 3t$ b) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 2t + 1$

   c) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 3\dfrac{dy}{dt} + 3y = t^2$ d) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = 8e^{2t}$

7. Variáveis separáveis. Resolva:

   a) $\dfrac{dx}{dt} = xt$ b) $\dfrac{dx}{dt} = y^2$ c) $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + 1$

   d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x},\ x > 0$ e) $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - 1$ f) $\dfrac{dv}{dt} = v^2 - v$

8. Equações diferenciais lineares de 1ª ordem.

a) $\dfrac{dx}{dt} = -x + 2$ b) $\dfrac{dx}{dt} = 2x - 1$

c) $\dfrac{dx}{dt} = x \operatorname{sen} t$ d) $\dfrac{dy}{dt} = y + \operatorname{sen} t$

9. Equação de Bernoulli. Resolva:

a) $\dfrac{dx}{dt} = 5y - \dfrac{4x}{y}$ b) $v\dfrac{dv}{dx} = v^2 - e^{2x}v^3$

c) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{t} - \sqrt{x},\ t > 0$ d) $y' = y - y^3$

10. Esboce o gráfico da solução que satisfa as condições iniciais dadas:

a) $\ddot{x} + 2\,\dot{x} + 2x = 0,\ x(0) = 0$ e $\dot{x}\,(0) = 1$

b) $\ddot{x} + 2\,\dot{x} + x = 0,\ x(0) = 1$ e $\dot{x}\,(0) = 0$

c) $\ddot{x} - x = 0,\ x(0) = 2$ e $\dot{x}\,(0) = 0$

11. a) Determine uma expressão em série de cossenos no intervalo $(0, \pi)$ para a função $f(x) = \operatorname{sen} x$. (vide exercício 15 lista 5)

b) Compute a soma $\dfrac{1}{2^2-1} + \dfrac{1}{4^2-1} + \dfrac{1}{c^2-1} + \dfrac{1}{8^2-1} + ...$

c) Compute o valor da série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^2-1} = \frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + ...$

12. a) Determine a série de Fourier da função $f(x) = \dfrac{x^3 - \pi^2 x}{3}, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$

b) Compute o valor da série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} + ...$

13. Seja $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ e $f(x) = e^{idx},\ -\pi < x < \pi$ e $f(x + 2\pi) = f(x)$.

a) Determine a série de Fourier de f.

b) Mostre que $\dfrac{\pi}{\operatorname{sen} \pi\,\alpha} = \dfrac{1}{\alpha} + 2\alpha \displaystyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}$.

c) Mostre que $\left(\dfrac{\pi}{\operatorname{sen} \pi\,\alpha}\right)^2 = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{(\alpha - n)^2}.$

Dica: $\displaystyle\int e^{i\beta x}\, dx = \dfrac{e^{i\beta x}}{i\beta} + c\ ,\ c \in \mathbb{C}$

14. Seja $f(x) = \cos x,\ 0 < x < \pi$.

a) Determine a série de senos de f.

b) Mostre que $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{10} = \dfrac{1}{2^2-1} - \dfrac{3}{6^2-1} + \dfrac{5}{10^2-1} - \dfrac{7}{14^2-1} + ...$

Respostas:

11. a) $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}$; 12. a) $\dfrac{\pi^3}{12}$