Curso: MAT 221- CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Segundo Semestre de 2008

LISTA DE EXERCÍCIOS 4 - SÉRIES
Prazo 24/09/08

Exercícios 1 e 2 completam a prova do critério de Raabe. Os demais constam em Guidorizzi, H. L., Um Curso de Cálculo, vol 4, seções 3.5, 6.2, 7.3 e 7.4.

1. Por L.2 3(g), $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$ diverge. Mostre que $\lim_{n\to+\infty} n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) = 1$, $a_n = \frac{1}{n \log n}$.

2. Por L.2 3(g), $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$ converge. Mostre que $\lim_{n\to+\infty} n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) = 1$, $a_n = \frac{1}{n(\log n)^2}$.

3. Para cada $n \geq 1$, seja $f_n(x) = \frac{nx}{nx^2+1}, x \in \mathbb{R}$. Consideremos $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.
   (a) Determine o domínio de convergência. Esboce os gráficos de f e das funções f_n.
   (b) A convergência da sequência (f_n) a f é uniforme sobre $\mathbb{R}$? E sobre $[r, +\infty), r > 0$?

4. Para cada $n \geq 1$, seja $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^4}, x \in \mathbb{R}$. Consideremos $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.
   (a) Determine o domínio de convergência. Esboce os gráficos de f e das funções f_n.
   (b) A convergência é uniforme sobre $[0, 1]$? Justifique. Vide sugestão no livro.
   (d) Mostre que $\int_0^1 [\lim_{n\to+\infty} f_n(x)]\, dx \neq \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$.

5. Mostre que a série dada converge uniformemente no intervalo dado.
   (a) $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ em $[-r, r], r > 0$.
   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$, em $[-r, r], 0 < r < 1$.

6. Mostre que a função dada é contínua.
   (a) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx^3}{n^4}$, $x \in \mathbb{R}$.
   (b) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{nx}}$, $x \in [1, +\infty)$.

7. Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$. Justifique a igualdade: $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \log(1 + \frac{1}{n^2})$.

8. Sejam $(a_n)_{n\geq 0}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ duas sequências em $\mathbb{R}$. Suponhamos que
$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [\, a_n \cos nx + b_n sen\, nx \,], x \in [-\pi, +\pi],$$
   a convergência sendo uniforme. Mostre que:
   (i) $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(x) \cos nx\, dx\,, \forall\, n \geq 0$, (*ii*) $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(x) sen\, nx\, dx\,, \forall\, n \geq 1$.
   A série é acima é a série de Fourier de F e os números $a_n, n \geq 0$, e $b_n, n \geq 1$, são os coeficientes de Fourier de F.

9. Determine os coeficientes de Fourier de $f(x) = x^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

10. Determine os coeficientes de Fourier de $f(x) = |x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$.