$2^{\underline{a}}$ Prova de Cálculo Diferencial e Integral IV - MAT221
$2^{\underline{o}}$ semestre de 2011
24/10/2011

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Extra	
Total	

Nome : ____________________ GABARITO ____________________
$N^{\underline{o}}$USP : ____
Professor : **Oswaldo Rio Branco de Oliveira**

É necessário justificar todas as passagens.
Boa Sorte!

1. Mostre, utilizando séries, que $\text{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Resolução. Verifiquemos antes as Fórmulas de Euler:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad\qquad \text{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \ .$$

Temos,

$$e^{iz} = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} + ... + \frac{(iz)^n}{n!} + ...$$
$$e^{-iz} = 1 - iz - \frac{z^2}{2!} + i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - i\frac{z^5}{5!} + ... + \frac{(iz)^n}{n!} + ... \ .$$

Logo,

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + ... + (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} + ...\right) ,$$
$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + ... + (-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...\right) \ .$$

Donde seguem as identidades de Euler:

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} = \cos z \, ,$$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \text{sen} z \ .$$

Utilizando tais identidades obtemos:

$$\cos^2 z + \text{sen}^2 z = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} = 1 \ \blacksquare$$

2. Determine o domínio de convergência das séries abaixo:

   (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^{2^n}$, $x \in \mathbb{R}$

   (b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n2^n}{3^n}(x - \frac{3}{2})^n$, $x \in \mathbb{R}$.

   Resolução:

   (a) Seja $x \neq 0$. Pelo teste da razão temos,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!|x|^{2^{n+1}}}{n!|x|^{2^n}} = \lim_{n\to+\infty}(n+1)|x|^{2^n} = \lim_{n\to+\infty}(n+1)e^{2^n \log|x|}.$$

   Tal limite é igual a 0 (logo, < 1) se $0 < |x| < 1$ e é $+\infty$ se $|x| \geq 1$. Assim, o domínio de convergência é

$$(-1, 1)\ .$$

   (b) Pela Fórmula de Hadamard temos,

$$\rho^{-1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n2^n}{3^n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}\frac{2}{3} = \frac{2}{3}\ .$$

   Logo, o raio de convergência é $\rho = \frac{3}{2}$. Assim, o intervalo aberto de convergência é $(0, 3)$. Se $x = 0$ e se $x = 3$, obtemos as séries $\sum^{+\infty}(-1)^n n$ e $\sum^{+\infty} n$, respectivamente, as quais divergem. Assim,o domínio de convergência é

$$(0, 3)\ \blacksquare$$

3. Para cada $n \geq 1$, seja $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^4}$, $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Compute $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$ e indique o domínio de convergência.

   (b) Esboce os gráficos de f e das funções f_n.

   (c) A convergência é uniforme sobre $[0, 1]$? Justifique.

   (d) O que você pode dizer sobre (justifique sua resposta)

$$\int_0^1 [\lim_{n \to +\infty} f_n(x)]dx \qquad \text{e} \qquad \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \quad ?$$

Resolução:

(a) É claro que
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x}{\frac{1}{n} + nx^4} = 0\,, \forall x \in \mathbb{R}\ .$$
Logo, temos $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Assim, $\mathbb{R}$ é o domínio de convergência.

(d) Com a mudança de variável $t = nx^2$, $\frac{dt}{dx} = 2nx$, obtemos,
$$\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4}dx \ = \int_0^n \frac{1}{2(1+t^2)}dt \ = \frac{\arctan n}{2}\ .$$
Logo,
$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \frac{\pi}{4}.$$
Assim, temos:
$$\int_0^1 \lim_{n \to +\infty} f_n(x)dx = 0 \ \neq \ \frac{\pi}{4} = \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)dx.$$

(c) Por (d), (f_n) não converge uniformemente a $f(x) = 0$ sobre $[0, 1]$ ■

4. a) Determine a série de Fourier de

$$f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}, \quad -\pi \le x \le \pi$$

e esboce o gráfico de f e de sua série de Fourier.

b) Compute $\displaystyle\sum_{n\ge1} \frac{1}{n^2} = \zeta(2)$.

c) Compute $1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + \ldots$

d) Compute $\zeta(4) = \displaystyle\sum_{n\ge1} \frac{1}{n^4}$.

Solução (V. Um Curso de Cálculo, H. L. Guidorizzi, v. 4, 5ª ed, p. 161, ex. 1)

(a) Como f é par, $b_n = 0\,, \forall n \in \mathbb{N}$, e $a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx\,, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4})\, dx \;=\; \frac{2}{\pi}(\frac{\pi^2 x}{12} - \frac{x^3}{12})\Big|_0^{\pi} \;= 0\;,$$

e, como $\forall n$, $sen n\pi = 0$ e $\cos n\pi = (-1)^n$ e, $\forall n \neq 0$, $\int_0^{\pi} \cos nx\, dx = 0$, temos

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}\right)\cos nx\, dx \;=\; -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x^2}{4}\cos nx\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left(x^2\frac{sen nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x\frac{sen nx}{n}\, dx\right) = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} x\, sen nx\, dx \;=$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\, dx\right) = -\frac{\pi(-1)^n}{n^2\pi} \;=\; \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\,.$$

Finalmente, a série de Fourier de f é,

$$S[f](x) \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx\;.$$

(b) Como f é monótona contínua por partes então $S[f] = f$ em $[-\pi, \pi]$. Logo,

$$-\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{4} = f(\pi) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n^2} \;=\; -\sum^{+\infty}\frac{1}{n^2} \;=\; -\zeta(2)\;.$$

(c) Analogamente,

$$\frac{\pi^2}{12} \;=\; f(0) = \sum^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \;=\; 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots.. + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \ldots..\quad.$$

(d) Pela fórmula de Parsevall , $\frac{|a_0|^2}{2} + \sum\limits_{n\ge1}(|a_n|^2 + |b_n|^2) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\, dx$, temos,

$$\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^4} \;=\; \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}\right)^2 dx \;=\; \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi^4}{144} - \frac{\pi^2 x^2}{24} + \frac{x^4}{16}\right) dx \;=$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^4 x}{144} - \frac{\pi^2 x^3}{72} + \frac{x^5}{80}\right)\Big|_0^{\pi} \;=\; 2\pi^4(\frac{1}{144} - \frac{2}{144} + \frac{1}{80}) \;=\; \frac{\pi^4}{90} \quad \blacksquare$$

5. Determine uma função contínua em $[-\pi, +\pi]$ que gere a série de Fourier $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{sen\, nx}{n^3}$. Compute então $\zeta(6) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$.

Resolução. Utilizemos o exercício anterior.

A série de Fourier de $f(x) = \dfrac{\pi^2}{12} - \dfrac{x^2}{4}, \quad -\pi \leq x \leq \pi$ é

$$S[f](x) \ = \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx \ .$$

Notemos que $\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx\right| \leq \frac{1}{n^2}$ e que $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$. Então, pelo Teste-M de Weierstrass, a série de Fourier de f converge uniformemente à função $f(x)$. Logo, podemos integrar termo a termo a série de Fourier e obtemos a integral de $f(x)$ (poderíamos chegar a mesma conclusão, utilizando um resultado enunciado em classe para a integração termo a termo de uma série de Fourier).

Temos então,

$$\int_0^t \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \frac{\operatorname{sen} t}{n} \ .$$

Logo,

$$-\left(\frac{\pi^2 t}{12} - \frac{t^3}{12}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{sen} t}{n^3} \ .$$

Então, pela identidade de Parseval obtemos

$$\sum \frac{1}{n^6} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi^4 t^2 - 2\pi^2 t^4 + t^6}{144} dt =$$

$$= \frac{1}{72\pi} \int_0^{\pi} (\pi^4 t^2 - 2\pi^2 t^4 + t^6) dt \ = \ \frac{1}{72\pi}\left(\frac{\pi^7}{3} - \frac{2\pi^7}{5} + \frac{\pi^7}{7}\right) =$$

$$= \frac{\pi^6}{72}\left(\frac{35 - 42 + 15}{105}\right) = \frac{\pi^6}{945} \quad \blacksquare$$

Extra. (1,0) Seja $P(z) = a_0 + a_1 z + ... a_n z^n$ um polinômio em $\mathbb{C}$ de grau $n \geq 1$. Mostre:

$$\lim_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty \ .$$

Resolução. Feita em sala ■