

**1ª Prova de Cálculo Diferencial e Integral IV - MAT221**  
**2º semestre de 2011**  
**21/09/2011**

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Extra	
Total	

Nome : \_\_\_\_\_ *GABARITO* \_\_\_\_\_  
 N<sup>o</sup>USP : \_\_\_\_\_  
 Professor : **Oswaldo Rio Branco de Oliveira**

**É necessário justificar todas as passagens.**  
**Boa Sorte!**

1. Determine os valores máximo e mínimo de

(a)  $\left| \frac{z-i}{z+i} \right|$ , onde  $|z| = 3$                       (b)  $|z+i|$ , onde  $|z-2| = 1$ .

**Resolução:**

Utilizemos o isomorfismo entre  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ , como espaços vetoriais reais.

(a) Seja  $C$  a circunferência de centro na origem e raio 3.

O ponto  $(0, -3) \equiv -3i$  é o ponto em  $C$  mais distante de  $i \equiv (0, 1)$  e também o mais próximo de  $-i \equiv (0, -1)$ . Logo, o valor máximo pedido é

$$\frac{|-3i - i|}{|-3i + i|} = \frac{4}{2} = 2.$$

O ponto  $(0, 3) \equiv 3i$  é o ponto em  $C$  mais próximo de  $i \equiv (0, 1)$  e também o mais distante de  $-i \equiv (0, -1)$ . Logo, o valor mínimo pedido é,

$$\frac{|3i - i|}{|3i + i|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

(b) Os pontos da circunferência  $C$ , centrada em  $z_o = 2$  e de raio 1, que são o mais próximo e o mais distante do ponto  $-i$  são os pertencentes à intersecção da reta determinada pelos pontos  $(0, -1)$  e  $(2, 0)$  com a circunferência  $C$ :

$$2 \pm \frac{2 - (-i)}{|2 - (-i)|} = 2 \pm \frac{2 + i}{\sqrt{5}}.$$

A distância mínima e máxima são, respectivamente,

$$\left| \left( 2 - \frac{2+i}{\sqrt{5}} \right) - (-i) \right| = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \quad , \quad \left| \left( 2 + \frac{2+i}{\sqrt{5}} \right) - (-i) \right| = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} \quad \blacksquare$$

**Atenção** Uma outra resolução para (a) é obtida analisando máximo/mínimo de

$$\frac{|z - i|^2}{|z + i|^2} = f(x, y) = \frac{x^2 + (y - 1)^2}{x^2 + (y + 1)^2} = \frac{10 - 2y}{10 + 2y} = \frac{5 - y}{5 + y},$$

para  $x^2 + y^2 = 9$ . Isto é, o máximo e o mínimo de  $g(y) = \frac{5-y}{5+y}$ ,  $y \in [-3, 3]$ .

2. Suponha que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ . Verifique que:

$$(a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = a$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = a, \text{ se } a > 0 \text{ e } a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Resolução.**

(a) Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $n > p \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon$ . Portanto,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a_1 + \dots + a_p + a_{p+1} + \dots + a_n}{n} - a \right| = \\ & = \left| \frac{a_1 + \dots + a_p - pa}{n} + \frac{a_{p+1} - a + a_{p+2} - a + \dots + a_n - a}{n} \right| \leq \\ & \leq \frac{\sum_{j=1}^p |a_j - a|}{n} + \frac{(n-p)\epsilon}{n} \leq \frac{\sum_{j=1}^p |a_j - a|}{n} + \epsilon, \quad \forall n > p. \end{aligned}$$

Como  $p$  é fixo, podemos escolher  $N > p$  tal que  $n > N \Rightarrow \frac{\sum_{j=1}^p |a_j - a|}{n} < \epsilon$ . Logo,

$$n > N \Rightarrow \left| \frac{a_1 + \dots + a_p + a_{p+1} + \dots + a_n}{n} - a \right| < 2\epsilon.$$

Isto prova o ítem (a).

(b) Imediato do item (a), notando que  $\log a_n \rightarrow a$  se  $n \rightarrow +\infty$ , e escrevendo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\log(a_1 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \log(a_1 \dots a_n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{\log a_1 + \dots + \log a_n}{n}} = \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log a_1 + \dots + \log a_n}{n}} = e^{\log a} = a \blacksquare \end{aligned}$$

3. Determine se são convergentes ou não as séries:

(a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3n+1}}$ .

(b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \left(1 - \cos \frac{1}{n^2}\right)$ .

(c)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}$ .

**Sugestões.**

(a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3n+1}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}} < \infty$ , pois  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\lambda}$  converge se  $\lambda > 1$ .

(b) **1ª solução:** Compare com  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ , computando

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(1 - \cos \frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^4}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} t}{2t} = \frac{1}{2}.$$

**2ª solução (do aluno Gabriel Salimene Zoha).** Se  $0 \leq x \leq 1$  temos,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \left(\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\right) + \dots \geq 1 - \frac{x^2}{2!} + 0 + 0 + 0 + \dots = 1 - \frac{x^2}{2!} \geq 0.$$

Logo,  $1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}$  se  $0 \leq x \leq 1$  e,

$$0 \leq n^2 \left(1 - \cos \frac{1}{n^2}\right) \leq \frac{1}{2n^2}, \quad \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Pelo Critério da Comparação, a série converge.

(c) Teste da razão ■

4. Dadas as séries  $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$  e  $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$ , seja  $a_n$  o termo geral de cada uma delas.

- (a) Calcule  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ , para cada uma delas.  
 (b) Calcule  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( 1 - \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \right)$ , para cada uma delas.  
 (c) Qual destas séries converge? Qual diverge?

**Resolução:**

(a) Como  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{\log(x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$  temos, para a primeira série,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \log n}{(n+1) \log(n+1)} = \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} \right) \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{\log(n+1)} \right) = 1,$$

e para a segunda série,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(\log n)^2}{(n+1)[\log(n+1)]^2} = \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} \right) \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{\log(n+1)} \right)^2 = 1.$$

(b) Para a primeira série devemos analisar o limite de,

$$k \left( 1 - \frac{k \log k}{(k+1) \log(k+1)} \right) = \frac{k}{k+1} \left[ 1 + \frac{\log(1 + \frac{1}{k})^k}{\log(k+1)} \right].$$

Para a segunda série devemos analisar o limite de,

$$k \left[ 1 - \frac{k \log^2 k}{(k+1) \log^2(k+1)} \right] = \frac{k}{k+1} \left[ 1 + k \frac{\log^2(k+1) - \log^2 k}{\log^2(k+1)} \right] = \frac{k}{k+1} \left[ 1 + \frac{\log(1 + \frac{1}{k})^k \log k(k+1)}{\log(k+1) \log(k+1)} \right].$$

Mas,  $\frac{k}{k+1} \rightarrow 1$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{k})^k}{\log(k+1)} = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x(x+1)}{\log(x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x + \log(x+1)}{\log(x+1)} = 2$ .

Logo, o limite obtido pelo teste de Raabe para ambas as séries é 1.

(c) Com os integrandos contínuos e decrescentes, vale o critério da integral:

$$\int_2^N \frac{1}{x \log x} dx = \log x \Big|_2^N = (\log N - \log 2) \rightarrow +\infty, \text{ se } N \rightarrow +\infty$$

e, substituindo  $y = \log x$  e  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ ,

$$\int_2^N \frac{1}{x \log^2 x} dx = \int_{\log 2}^{\log N} \frac{dy}{y^2} = \left( -\frac{1}{y} \right) \Big|_{\log 2}^{\log N} \rightarrow \frac{1}{\log 2}, \text{ se } N \rightarrow +\infty.$$

Logo, a primeira série diverge e a segunda série converge ■

5. Dada a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad -1 < \alpha < 0,$$

determine se ela é divergente, convergente, condicionalmente convergente, ou absolutamente convergente.

**Atenção:** No excelente livro “Exercícios Propostos e Resolvidos de Sequências e Séries Numéricas e de Funções” do Prof. Boulos há um engano relacionado a tal exercício. Encontre-o ! A prova sugerida no livro do Prof Guidorizzi é distinta desta e utiliza um lema não intuitivo e não simples. A prova abaixo é auto-suficiente.

**Resolução:**

- Pondo  $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$  e aplicando o Critério de Raabe temos,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( 1 - \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( 1 - \frac{|\alpha - n|}{n+1} \right)$$

e, notando que  $|\alpha - n| = n - \alpha$  se  $n$  é suficientemente grande,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( 1 - \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( 1 - \frac{n - \alpha}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \frac{\alpha + 1}{n+1} = \alpha + 1.$$

Como  $\alpha + 1 < 1$ , pelo Crit. de Raabe  $\sum \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \right|$  **diverge**.

- Visto que  $-1 < \alpha < 0$  temos  $-\alpha < 1$  e concluímos:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n - \alpha}{n+1} < 1,$$

e a sequência  $(|a_n|)$  decresce e existe  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = L$ . Mostremos que  $L = 0$ .

Fixo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > \alpha$ , se  $\beta = 1 + \alpha$  temos  $0 < \beta < 1$  e, para  $p \in \mathbb{N}$  arbitrário,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n - \alpha}{n+1} = \frac{n+1 - (1 + \alpha)}{n+1} = 1 - \frac{\beta}{n+1},$$

$$\left| \frac{a_{n+p}}{a_n} \right| = \left| \frac{a_{n+p}}{a_{n+p-1}} \frac{a_{n+p-1}}{a_{n+p-2}} \dots \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left( 1 - \frac{\beta}{n+p} \right) \left( 1 - \frac{\beta}{n+p-1} \right) \dots \left( 1 - \frac{\beta}{n+1} \right),$$

$$(*) \quad \left| \frac{a_{n+p}}{a_n} \right| \leq \left( 1 - \frac{\beta}{n+p} \right)^p \leq \left( 1 - \frac{\beta}{n+p} \right)^{p+n} \left( 1 - \frac{\beta}{n+p} \right)^{-n}.$$

Como  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x$ ,  $\forall x$ , com o limite em (\*) para  $p \rightarrow +\infty$  temos

$$0 \leq \frac{L}{a_n} \leq e^{-\beta}, \quad \forall n > \alpha, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Desta forma temos,  $0 \leq e^\beta L \leq \lim a_n = L$ , o que implica  $L = 0$  pois  $e^\beta > 1$ .

Logo, pelo critério de Leibnitz,  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n |a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é **convergente** ■

**Extra.** Seja  $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$  um polinômio complexo e de grau  $n \geq 1$  (isto é,  $a_n \neq 0$ ). Mostre que :

(a)  $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |P(z)| = +\infty$ .

(b) Existe  $z_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $|P(z_0)| \leq |P(z)|, \forall z \in \mathbb{C}$ .

(c) Podemos assumir, sem perda de generalidade,  $z_0 = 0$ .

**Resolução.** Provado em sala ■